

## Recherche Opérationnelle

### Méthodes approchées - Heuristiques

## 1 Problème du voyageur de commerce

Dans le problème de voyageur de commerce (PUC), il s'agit de trouver le circuit hamiltonien ( passant par chaque ville) de distance totale minimale.

Soit le problème posé à un sympathique VRP Parisien et associé à la matrice des distances suivantes :

	Paris	Brest	Caen	Le Mans	Lille	Metz	Strasbourg
Paris	-	600	240	200	220	330	490
Brest	600	-	420	400	820	930	1090
Caen	240	420	-	150	320	570	730
Le Mans	200	400	150	-	420	530	690
Lille	220	820	320	420	-	350	510
Metz	330	930	570	530	350	-	160
Strasbourg	490	1090	730	690	510	160	-

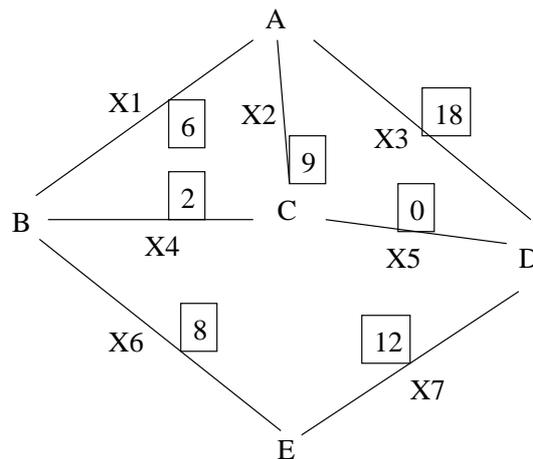
1. Utiliser l'heuristique gloutonne du plus proche voisin pour construire une solution.
2. Proposer une autre heuristique.

## 2 Problème de l'arbre couvrant minimal

Le problème d'arbre couvrant de poids minimum est le suivant :

Etant donné un graphe connexe G, dont les arêtes sont valuées, on recherche l'arbre extrait de G dont la somme des poids des (n-1) arêtes est minimale.

Soit le graphe suivant :



2 contraintes supplémentaires sont apparues dans la détermination du réseau à moindre coût reliant A,B,C,D,E :

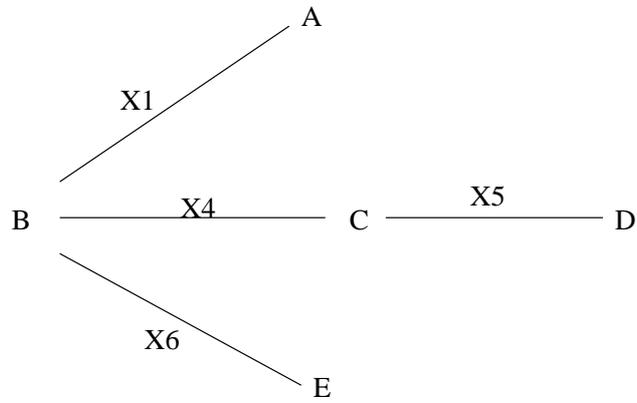
Il faut avoir :

- $X_1 + X_2 + X_6 \leq 1$
- $X_1 \leq X_3$

Il a été décidé que si l'une de ces 2 contraintes était violée, on ajoutait au coût une pénalité de 50 (100 si elles le sont toutes deux).

Ainsi la solution de départ (qui correspond à l'arbre couvrant de poids minimum) coûte t'elle :  $100 + 16 = 116$

Appliquer la méthode Tabou sur ce problème.



### 3 Installation d'entrepôts

Une entreprise s'installant en France et y créant un réseau de distribution souhaite y construire 5 entrepôts. Elle a pour l'instant retenu 15 emplacements possibles et estimé pour chacun d'entre eux le coût de la construction et de l'installation. Ces coûts, exprimés en millions d'Euros sont résumés dans la table ci-dessous.

Ville	Coût	Ville	Coût	Ville	Coût
Bordeaux	23	Clermont	10	Dijon	14
Le Mans	19	Limoges	14	Lyon	25
Marseille	27	Montelimar	16	Montpellier	20
Orleans	15	Paris	30	Poitiers	18
Reims	13	Toulouse	23	Troyes	12

L'entreprise souhaite minimiser le coût total d'installation et le problème serait donc enfantin si elle ne souhaitait aussi que les sites choisis soient suffisamment distants les uns des autres (pour bien couvrir le territoire). Elle s'interdit ainsi que dans la solution, certains sites puissent être choisis conjointement. La liste suivante récapitule ainsi tous les couples de sites qui ne peuvent pas être choisis ensemble (car trop proches).

*(Bordeaux, Limoges), (Bordeaux, Toulouse), (Clermont, Limoges), (Clermont, Lyon), (Dijon, Lyon), (Dijon, Troyes), (LeMans, Orleans), (LeMans, Poitiers), (Limoges, Poitiers), (Lyon, Montelimar), (Marseille, Montelimar), (Marseille, Montpellier), (Montelimar, Montpellier), (Montpellier, Toulouse), (Orleans, Paris), (Orleans, Troyes), (Paris, Reims), (Paris, Troyes), (Reims, Troyes).*

1. Représenter les incompatibilités entre villes sous forme d'un graphe.
2. Proposer une méthode constructive simple basée sur l'ordre croissant des couts et permettant d'obtenir une solution réalisable.
3. La solution obtenue à la question précédente vous parait-elle être optimale? Si non, comment pourriez-vous l'améliorer?

### 4 Je n'arrive pas à capter Star Ac (6 points)

Sept sites  $s_1, s_2, \dots, s_7$  ont été retenus pour construire des émetteurs de télévision destinés à couvrir un ensemble de 8 zones  $z_1, z_2, \dots, z_8$ . Sur chaque site, on ne peut construire qu'au plus un émetteur. Le tableau ci-dessous donne, pour chaque site, le coût de construction d'un émetteur et les zones desservies.

Site	Coût	Zones couvertes
$s_1$	15	$z_1, z_2, z_3$
$s_2$	17	$z_1, z_4, z_5$
$s_3$	20	$z_2, z_4, z_6, z_7$
$s_4$	22	$z_1, z_7, z_8$
$s_5$	23	$z_3, z_5, z_6, z_8$
$s_6$	24	$z_2, z_3, z_4, z_7$
$s_7$	26	$z_2, z_4, z_5, z_6, z_8$

On cherche à déterminer les sites sur lesquels il faut construire un émetteur de façon à pouvoir assurer la diffusion sur toutes les zones et, ce, au moindre coût. Une zone peut bien sur être couverte par plusieurs émetteurs.

1. Modéliser le problème sous forme mathématique. Pour cela, définissez clairement les variables utilisées et donnez la fonction économique à optimiser et les contraintes à respecter.
2. Proposer une heuristique simple permettant d'obtenir une solution réalisable d'assez bonne qualité pour n'importe quelle instance du problème. Quelle solution obtenez-vous sur l'exemple proposé ci-dessus?
3. On souhaite en fait développer une heuristique de recherche locale pour essayer d'améliorer la solution que vous venez de trouver à la question précédente. Quelles méthodes de recherche locale connaissez-vous? Proposez une structure de voisinage adaptée au problème considéré.
4. Appliquez votre structure de voisinage en effectuant, disons les deux premières itérations d'une méthode de recherche locale.

## 5 Ordonnement avec ressource

Une entreprise est confrontée à un problème d'ordonnement de sa production. Les différentes tâches devant être exécutées prochainement sur la chaîne de production sont soumises classiquement à des contraintes d'antériorité qui sont résumées dans la table ci-dessous. De plus, chacune de ces tâches monopolise un certain niveau de ressource, également indiqué dans cette table. La quantité totale de ressource disponible est de 10 unités. Ainsi, plusieurs tâches peuvent être exécutées simultanément tant que la quantité totale de ressource qu'elles requièrent ne dépasse pas cette limite.

Tâches	Durée	Tâches préalables	Ressource
A	15	-	7
B	10	-	3
C	12	-	4
D	8	A	6
E	6	A et B	5
F	10	B et C	3
G	6	F	2
H	7	D, E et G	4
I	5	G	5
J	3	D et E	2
K	2	J	6

1. Résoudre par la méthode PERT le problème d'ordonnement classique dans lequel la contrainte de ressource est relâchée (omise).
2. Adapter la solution trouvée à la question précédente pour proposer une solution réalisable au problème de la société, c'est à dire une solution tenant compte de la contrainte de ressource. Durant la construction de cette solution, vous donnerez la priorité au traitement des tâches critiques.
3. On souhaite améliorer la solution que vous venez de trouver et, pour cela, utiliser une heuristique de recherche locale. Quelles méthodes de recherche locale connaissez-vous? Proposez une structure de voisinage adaptée au problème considéré.
4. Montrer rapidement en quoi l'application de cette structure de voisinage peut permettre d'améliorer la solution de la question 2.2.