

Cours-TD Compléments d'Algèbre

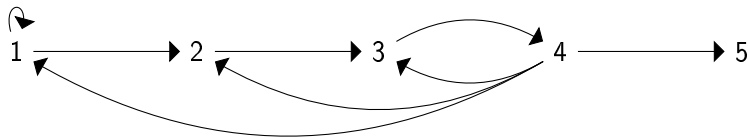
S4

10 Mars 2021

Matrices et graphes

Rappelons que l'on peut coder un graphe par une matrice, dite matrice d'adjacence. L'élément d'indice i, j de la matrice contient un 1 s'il y a une arête entre le sommet i et le sommet j dans le graphe et 0 sinon.

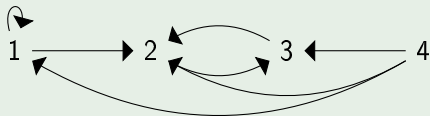
Considérons par exemple le graphe ci-dessous.



Sa matrice d'adjacence est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

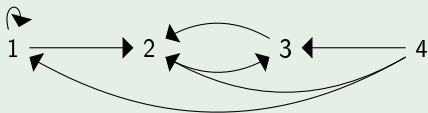
- ❶ On considère le graphe ci-dessous, quelle est sa matrice d'adjacence A ?



- ❷ Calculer A^2 et A^3 pour les opérations $+$ et $\times$ classiques.
- ❸ Combien y a-t-il de chemin de longueur 2 dans le graphe allant de 1 à 1 ? de 1 à 2 ? de 3 à 3 ? de 4 à 1 ?
- ❹ Même question mais avec les chemins de longueurs 3.
- ❺ Comparer les résultats avec les matrice A^2 et A^3 . Que remarquez vous ?

Exercice 1

- ❶ Soit le graphe ci-dessous, quelle est sa matrice d'adjacence A ?

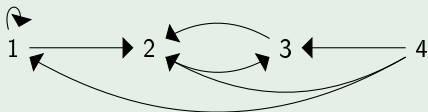


- ❷ Calculer A^2 et A^3 pour les opérations $+$ et $\times$ classiques.
- ❸ Combien y a-t-il de chemin de longueur 2 dans le graphe allant de 1 à 1 ? de 1 à 2 ? de 3 à 3 ? de 4 à 1 ?
- ❹ Même question mais avec les chemins de longueurs 3.
- ❺ Comparer les résultats avec les matrices A^2 et A^3 . Remarque ?

1) Sa matrice d'adjacence est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

- ❶ Soit le graphe ci-dessous, quelle est sa matrice d'adjacence A ?

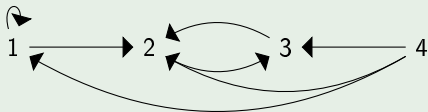


- ❷ Calculer A^2 et A^3 pour les opérations $+$ et $\times$ classiques.
- ❸ Combien y a-t-il de chemin de longueur 2 dans le graphe allant de 1 à 1 ? de 1 à 2 ? de 3 à 3 ? de 4 à 1 ?
- ❹ Même question mais avec les chemins de longueurs 3.
- ❺ Comparer les résultats avec les matrices A^2 et A^3 . Remarque ?

$$2) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

- ❶ Soit le graphe ci-dessous, quelle est sa matrice d'adjacence A ?



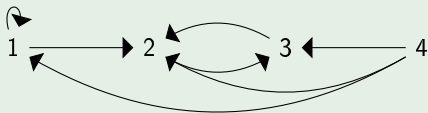
- ❷ Calculer A^2 et A^3 pour les opérations $+$ et $\times$ classiques.
- ❸ Combien y a-t-il de chemin de longueur 2 dans le graphe allant de 1 à 1 ? de 1 à 2 ? de 3 à 3 ? de 4 à 1 ?
- ❹ Même question mais avec les chemins de longueurs 3.
- ❺ Comparer les résultats avec les matrice A^2 et A^3 . Remarque ?

$$2) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3) Il y a 1 chemin de longueur 2 dans chaque cas.

Exercice 1

- ❶ Soit le graphe ci-dessous, quelle est sa matrice d'adjacence A ?



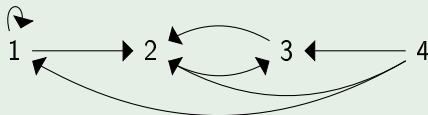
- ❷ Calculer A^2 et A^3 pour les opérations $+$ et $\times$ classiques.
- ❸ Combien y a-t-il de chemin de longueur 2 dans le graphe allant de 1 à 1 ? de 1 à 2 ? de 3 à 3 ? de 4 à 1 ?
- ❹ Même question mais avec les chemins de longueurs 3.
- ❺ Comparer les résultats avec les matrices A^2 et A^3 . Remarque ?

$$2) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 4) Il y a 1 chemin de longueur 3 allant de 1 à 1 ; 2 chemins de longueur 3 allant de 1 à 2 ; aucun de 3 à 3 et 1 chemin de 4 à 1.

Exercice 1

- ❶ On considère le graphe ci-dessous, quelle est sa matrice d'adjacence A ?

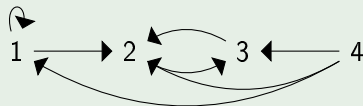


- ❷ Calculer A^2 et A^3 pour les opérations $+$ et $\times$ classiques.
- ❸ Combien y a-t-il de chemin de longueur 2 dans le graphe allant de 1 à 1 ? de 1 à 2 ? de 3 à 3 ? de 4 à 1 ?
- ❹ Même question mais avec les chemins de longueurs 3.
- ❺ Comparer les résultats avec les matrices A^2 et A^3 . Remarque ?

5) Le nombre de chemin allant de i à j de longueur 2 est le coefficient $a_{(i,j)}$ de la matrice A^2 .

Le nombre de chemin allant de i à j de longueur 3 est le coefficient $a_{(i,j)}$ de la matrice A^3 .

Exercice 1 (suite)



On considère toujours le graphe

sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

et

- 1 Calculer AX_1 , AX_2 et AY , où $X_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$, $X_2 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ et $Y = {}^t(1, 0, 1, 0)$.
- 2 Si l'on multiplie une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?
- 3 Calculer tX_1A , tX_2A et tYA .
- 4 Si l'on multiplie (à gauche) une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?

Exercice 1 (suite)

On considère toujours le même graphe et sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1 Calculer AX_1 , AX_2 et AY , où $X_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$, $X_2 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ et $Y = {}^t(1, 0, 1, 0)$.
- 2 Si l'on multiplie une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?
- 3 Calculer tX_1A , tX_2A et tYA .
- 4 Si l'on multiplie (à gauche) une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?

$$1) AX_1 = {}^t(1, 0, 0, 1), AX_2 = {}^t(1, 0, 1, 1) \text{ et } AY = {}^t(1, 1, 0, 2).$$

Exercice 1 (suite)

On considère toujours le même graphe et sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ❶ Calculer AX_1 , AX_2 et AY , où $X_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$, $X_2 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ et $Y = {}^t(1, 0, 1, 0)$.
- ❷ Si l'on multiplie une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?
- ❸ Calculer tX_1A , tX_2A et tYA .
- ❹ Si l'on multiplie (à gauche) une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?

1) $AX_1 = {}^t(1, 0, 0, 1)$, $AX_2 = {}^t(1, 0, 1, 1)$ et $AY = {}^t(1, 1, 0, 2)$.

2) On obtient un vecteur dont chaque ligne j contient le nombre d'arêtes partant de j et arrivant au sommet i contenant un 1 dans

Exercice 1 (suite)

On considère toujours le même graphe et sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1 Calculer AX_1 , AX_2 et AY , où $X_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$, $X_2 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ et $Y = {}^t(1, 0, 1, 0)$.
- 2 Si l'on multiplie une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?
- 3 Calculer tX_1A , tX_2A et tYA .
- 4 Si l'on multiplie (à gauche) une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?

$$3) {}^tX_1A = (1, 1, 0, 0), {}^tX_2A = (0, 0, 1, 0) \text{ et } {}^tYA = (1, 2, 0, 0).$$

Exercice 1 (suite)

On considère toujours le même graphe et sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

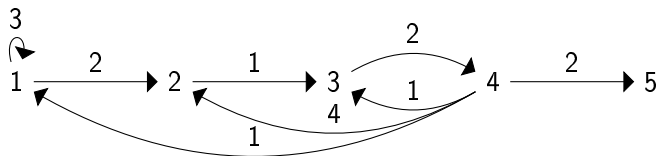
- ❶ Calculer AX_1 , AX_2 et AY , où $X_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$, $X_2 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ et $Y = {}^t(1, 0, 1, 0)$.
- ❷ Si l'on multiplie une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?
- ❸ Calculer tX_1A , tX_2A et tYA .
- ❹ Si l'on multiplie (à gauche) une matrice d'adjacence d'un graphe par un vecteur contenant des 0 et des 1, qu'obtient-on ?

3) ${}^tX_1A = (1, 1, 0, 0)$, ${}^tX_2A = (0, 0, 1, 0)$ et ${}^tYA = (1, 2, 0, 0)$.

4) On obtient un vecteur dont chaque ligne j contient le nombre d'arêtes partant des sommets i contenant un 1 dans le vecteur

Matrices et graphes

On considère le graphe pondéré suivant (pondéré veut dire qu'on associe à chaque arête un poids, ici un entier positif).



Sa matrice d'adjacence pondéré est constituée en indiquant le poids de chaque arête, avec un 0 s'il n'y en a pas. Dans le cas présent on obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Merci de votre attention,
et à tout de suite pour les TPs**