

Cours-TD Probabilités Statistiques

S3

9 Décembre 2020

Exercice 52

On considère un sac contenant 3 balles bleues et 2 balles rouges.
On tire, avec remise et indépendamment 10 fois une balle du sac.

- 1 Quelle est la probabilité d'avoir tiré exactement 4 balles bleues ?
- 2 Quelle est la probabilité d'avoir tiré autant de balles bleues que de balles rouges ?

Exercice 52

On considère un sac contenant 3 balles bleues et 2 balles rouges.
On tire, avec remise et indépendamment 10 fois une balle du sac.

- 1 Quelle est la probabilité d'avoir tiré exactement 4 balles bleues ?
- 2 Quelle est la probabilité d'avoir tiré autant de balles bleues que de balles rouges ?

Soit X variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{5} = 0,6$.

$$1) P(X = 4) = C_{10}^4 \times 0,6^4 \times 0,4^6 \approx 0,11$$

Exercice 52

On considère un sac contenant 3 balles bleues et 2 balles rouges.
On tire, avec remise et indépendamment 10 fois une balle du sac.

- 1 Quelle est la probabilité d'avoir tiré exactement 4 balles bleues ?
- 2 Quelle est la probabilité d'avoir tiré autant de balles bleues que de balles rouges ?

Soit X variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{5} = 0,6$.

$$2) P(X = 5) = C_{10}^5 \times 0,6^5 \times 0,4^5 \approx 0,2$$

En moyenne une expérience de Bernoulli de paramètre p exécutée n fois réussit np fois, ce qui s'écrit :

Proposition 53

On a $E[B(n, p)] = np$

Par ailleurs, après quelques calculs, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 54

On a $\text{var}[B(n, p)] = np(1 - p)$.

Exercice 55

Un archer au jeu Olympique touche sa cible dans le centre avec une probabilité 0.8. Il tire 5 flèches dans la cible à la suite. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de flèche dans le centre à la fin des 5 tirs.

- 1 Que vaut $P(X = 5)$?
- 2 Que vaut $P(X = 4)$?
- 3 Que vaut $P(X \geq 4)$?

Exercice 55

Un archer au jeu Olympique touche sa cible dans le centre avec une probabilité 0.8. Il tire 5 flèches dans la cible à la suite. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de flèche dans le centre à la fin des 5 tirs.

- 1) Que vaut $P(X = 5)$?
- 2) Que vaut $P(X = 4)$?
- 3) Que vaut $P(X \geq 4)$?

$$1) P(X = 5) = C_5^5 \times 0,8^5 \times 0,2^0 \approx 0,33$$

Exercice 55

Un archer au jeu Olympique touche sa cible dans le centre avec une probabilité 0.8. Il tire 5 flèches dans la cible à la suite. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de flèche dans le centre à la fin des 5 tirs.

- 1) Que vaut $P(X = 5)$?
- 2) Que vaut $P(X = 4)$?
- 3) Que vaut $P(X \geq 4)$?

$$1) P(X = 5) = C_5^5 \times 0,8^5 \times 0,2^0 \approx 0,33$$

$$2) P(X = 4) = C_5^4 \times 0,8^4 \times 0,2^1 \approx 0,41$$

Exercice 55

Un archer au jeu Olympique touche sa cible dans le centre avec une probabilité 0.8. Il tire 5 flèches dans la cible à la suite. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de flèche dans le centre à la fin des 5 tirs.

- 1) Que vaut $P(X = 5)$?
- 2) Que vaut $P(X = 4)$?
- 3) Que vaut $P(X \geq 4)$?

$$1) P(X = 5) = C_5^5 \times 0,8^5 \times 0,2^0 \approx 0,33$$

$$2) P(X = 4) = C_5^4 \times 0,8^4 \times 0,2^1 \approx 0,41$$

$$3) P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) \approx 0,74$$

Loi géométrique :

Une **variable aléatoire géométrique de paramètre p** est une variable qui compte le nombre d'essais avant de réussir une expérience de Bernoulli de paramètre p . Plus formellement, c'est une variable aléatoire qui vérifie

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p.$$

La probabilité qu'il faille n coups pour réussir l'expérience est la probabilité qu'elle est ratée $n - 1$ fois (ce qui donne le $(1 - p)^{n-1}$) fois la probabilité qu'elle réussisse au n -ième coup, ce qui donne le p . Par exemple, la loi géométrique de raison $\frac{1}{6}$ compte le nombre de fois qu'il faut lancer un dé équilibré pour obtenir un 6.

Loi géométrique :

Une **variable aléatoire géométrique de paramètre p** est une variable qui compte le nombre d'essais avant de réussir une expérience de Bernoulli de paramètre p . Plus formellement, c'est une variable aléatoire qui vérifie $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$.

Exercice 56

On va vérifier dans cet exercice que la définition ci-dessus d'une variable aléatoire géométrique satisfait bien que la probabilité de l'univers est 1. On suppose $0 < p < 1$.

- 1 Ecrire sous forme d'une somme $P(X \leq n)$.
- 2 Dans la somme ci-dessus, factoriser par p .
- 3 En posant $q = 1 - p$, reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique dans la formule obtenue à la question précédente.
- 4 En déduire une formule pour $P(X \leq n)$. Que devient-elle lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 56

- 1 Ecrire sous forme d'une somme $P(X \leq n)$.
- 2 Dans la somme ci-dessus, factoriser par p .
- 3 En posant $q = 1 - p$, reconnaître la somme des terme d'une suite géométrique dans la formule obtenue à la question précédente.
- 4 En déduire un formule pour $P(X \leq n)$. Que devient-elle lorsque n tend vers l'infini.

$$1) P(X \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X = k) = \sum_{k=1}^n (1 - p)^{k-1} p$$

Exercice 56

- 1) Ecrire sous forme d'une somme $P(X \leq n)$.
- 2) Dans la somme ci-dessus, factoriser par p .
- 3) En posant $q = 1 - p$, reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique dans la formule obtenue à la question précédente.
- 4) En déduire une formule pour $P(X \leq n)$. Que devient-elle lorsque n tend vers l'infini.

$$1) P(X \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X = k) = \sum_{k=1}^n (1 - p)^{k-1} p$$

$$2) P(X \leq n) = \sum_{k=1}^n (1 - p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^n (1 - p)^{k-1}$$

Exercice 56

- 1 Ecrire sous forme d'une somme $P(X \leq n)$.
- 2 Dans la somme ci-dessus, factoriser par p .
- 3 En posant $q = 1 - p$, reconnaître la somme des terme d'une suite géométrique dans la formule obtenue à la question précédente.
- 4 En déduire un formule pour $P(X \leq n)$. Que devient-elle lorsque n tend vers l'infini.

$$2) P(X \leq n) = \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1}$$

$$3) \text{ et } 4) P(X \leq n) = p \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^n q^{k-1} = p \sum_{i=0}^{n-1} q^i =$$

$$p \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 - (1-p)^n$$

Donc $P(X \leq n)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Loi géométrique :

Proposition 57

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \neq 0$. On a

$$E[X] = \frac{1}{p}.$$

Exercice 58

On lance plusieurs fois un dé à 6 face. Combien faut-il lancer de fois pour espérer obtenir un 6 ?

Loi géométrique :

Exercice 58

On lance plusieurs fois un dé à 6 face. Combien faut-il lancer de fois pour espérer obtenir un 6 ?

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

Exercice 59

On s'intéresse ici au problème du collectionneur. Supposons qu'un enfant mange des céréales et que dans chaque paquet il y a une carte représentant un pokemon. On suppose qu'il n'est pas possible, en achetant une boîte, de savoir quelle carte il y a dedans et que toutes les cartes apparaissent avec la même probabilité dans un paquet. La question est combien de paquet il devra acheter pour avoir les n cartes différentes.

- 1 On pose X_i (pour $1 \leq i \leq n$), la variable aléatoire qui compte le nombre de paquets achetés la première fois que l'enfant obtient exactement i cartes différentes. Par exemple X_4 est le nombre de paquets acheté le jour où il trouve sa quatrième carte différente. Que vaut X_1 ?
- 2 Dans cette question on suppose qu'il y a 4 cartes différentes, notées a , b , c et d . L'enfant obtient les cartes suivantes dans l'ordre : a, a, b, c, a, c, b, d . Sur cet exemple, quelles sont les valeurs de X_1 , X_2 , X_3 et X_4 ?

Exercice 59

On s'intéresse ici au problème du collectionneur. Supposons qu'un enfant mange des céréales et que dans chaque paquet il y a une carte représentant un pokemon. On suppose qu'il n'est pas possible, en achetant une boîte, de savoir quelle carte il y a dedans et que toutes les cartes apparaissent avec la même probabilité dans un paquet. La question est combien de paquet il devra acheter pour avoir les n cartes différentes.

- 1 $X_1 = 1$.
- 2 Dans cette question on suppose qu'il y a 4 cartes différentes, notées a , b , c et d . L'enfant obtient les cartes suivantes dans l'ordre : a, a, b, c, a, c, b, d . Sur cet exemple, quelles sont les valeurs de X_1 , X_2 , X_3 et X_4 ?
- 3 Justifier que la variable aléatoire qui nous intéresse pour ce problème est X_n .
- 4 On pose $Y_i = X_i - X_{i-1}$ pour i de 2 à n et $Y_1 = X_1$. Justifier (c'est un simple calcul qui ne fait pas intervenir les

Exercice 59

On s'intéresse ici au problème du collectionneur. Supposons qu'un enfant mange des céréales et que dans chaque paquet il y a une carte représentant un pokemon. On suppose qu'il n'est pas possible, en achetant une boîte, de savoir quelle carte il y a dedans et que toutes les cartes apparaissent avec la même probabilité dans un paquet. La question est combien de paquet il devra acheter pour avoir les n cartes différentes.

- 1 $X_1 = 1$.
- 2 $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 4$ et $X_4 = 8$.
- 3 Justifier que la variable aléatoire qui nous intéresse pour ce problème est X_n .
- 4 On pose $Y_i = X_i - X_{i-1}$ pour i de 2 à n et $Y_1 = X_1$. Justifier (c'est un simple calcul qui ne fait pas intervenir les probabilités) que $X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.
- 5 Exprimer en français ce que compte Y_i .
- 6 Justifier que Y_i (pour $i \geq 2$) suit une loi géométrique de raison

Exercice 59

On s'intéresse ici au problème du collectionneur. Supposons qu'un enfant mange des céréales et que dans chaque paquet il y a une carte représentant un pokemon. On suppose qu'il n'est pas possible, en achetant une boîte, de savoir quelle carte il y a dedans et que toutes les cartes apparaissent avec la même probabilité dans un paquet. La question est combien de paquet il devra acheter pour avoir les n cartes différentes.

- 1 $X_1 = 1$.
- 2 $X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$ et $X_4 = 8$.
- 3 X_n compte bien le nombre de paquets à acheter pour avoir n cartes différentes.
- 4 On pose $Y_i = X_i - X_{i-1}$ pour i de 2 à n et $Y_1 = X_1$. Justifier (c'est un simple calcul qui ne fait pas intervenir les probabilités) que $X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.
- 5 Exprimer en français ce que compte Y_i .
- 6 Justifier que Y_i (pour $i \geq 2$) suit une loi géométrique de raison

Exercice 59

On s'intéresse ici au problème du collectionneur. Supposons qu'un enfant mange des céréales et que dans chaque paquet il y a une carte représentant un pokemon. On suppose qu'il n'est pas possible, en achetant une boîte, de savoir quelle carte il y a dedans et que toutes les cartes apparaissent avec la même probabilité dans un paquet. La question est combien de paquet il devra acheter pour avoir les n cartes différentes.

- 1 $X_1 = 1$.
- 2 $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 4$ et $X_4 = 8$.
- 3 X_n compte bien le nombre de paquets à acheter pour avoir n cartes différentes.
- 4 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_n - X_{n-1} = X_n$
- 5 Exprimer en français ce que compte Y_i .
- 6 Justifier que Y_i (pour $i \geq 2$) suit une loi géométrique de raison $1 - \frac{i-1}{n}$.

Exercice 59

La question est combien de paquet il devra acheter pour avoir les n cartes différentes.

- 1 $X_1 = 1$.
- 2 $X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$ et $X_4 = 8$.
- 3 X_n compte bien le nombre de paquets à acheter pour avoir n cartes différentes.
- 4 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_n - X_{n-1} = X_n$
- 5 Y_i compte le nombre de paquets avant d'obtenir une carte différente des $(i-1)$ précédentes.
- 6 Justifier que Y_i (pour $i \geq 2$) suit une loi géométrique de raison $1 - \frac{i-1}{n}$.
- 7 En utilisant la linéarité des espérances, montrer que $E[X_n] = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{k}$.
- 8 En admettant que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$, en déduire une majoration de $E[X_n]$. S'il y a 10 cartes, que donne cette majoration ? s'il

Exercice 59

La question est combien de paquet il devra acheter pour avoir les n cartes différentes.

- 1 $X_1 = 1$.
- 2 $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 4$ et $X_4 = 8$.
- 3 X_n compte bien le nombre de paquets à acheter pour avoir n cartes différentes.
- 4 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_n - X_{n-1} = X_n$
- 5 Y_i compte le nombre de paquets avant d'obtenir une carte différente des $(i-1)$ précédentes.
- 6 On considère l'expérience de Bernoulli obtenir une carte différente des précédentes, son paramètre est $p = 1 - \frac{i-1}{n}$. Y_i compte le nombre d'essais avant de réussir cette expérience donc Y_i suit une loi géométrique de raison $1 - \frac{i-1}{n}$.
- 7 En utilisant la linéarité des espérances, montrer que $E[X_n] = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 59

- 1 $X_1 = 1$.
- 2 $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 4$ et $X_4 = 8$.
- 3 X_n compte bien le nombre de paquets à acheter pour avoir n cartes différentes.
- 4 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_n - X_{n-1} = X_n$
- 5 Y_i compte le nombre de paquets avant d'obtenir une carte différente des $(i-1)$ précédentes.
- 6 On considère l'expérience de Bernoulli obtenir une carte différente des précédentes, son paramètre est $p = 1 - \frac{i-1}{n}$. Y_i compte le nombre d'essais avant de réussir cette expérience donc Y_i suit une loi géométrique de raison $1 - \frac{i-1}{n}$.

$$7 \quad E[X_n] = \sum_{i=1}^n E[Y_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{i-1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n - (i-1)} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercice 59

- 1 X_n compte bien le nombre de paquets à acheter pour avoir n cartes différentes.
- 2 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_n - X_{n-1} = X_n$
- 3 Y_i compte le nombre de paquets avant d'obtenir une carte différente des $(i-1)$ précédentes.
- 4 On considère l'expérience de Bernoulli obtenir une carte différente des précédentes, son paramètre est $p = 1 - \frac{i-1}{n}$. Y_i compte le nombre d'essais avant de réussir cette expérience donc Y_i suit une loi géométrique de raison $1 - \frac{i-1}{n}$.

$$5 \quad E[X_n] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{i-1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n - (i-1)} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{k}.$$

- 6 En admettant que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$, en déduire une majoration de $E[X_n]$. S'il y a 10 cartes, que donne cette majoration ? s'il en a 30 ?

Exercice 59

- ① X_n compte bien le nombre de paquets à acheter pour avoir n cartes différentes.
- ② $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_n - X_{n-1} = X_n$
- ③ Y_i compte le nombre de paquets avant d'obtenir une carte différente des $(i-1)$ précédentes.
- ④ On considère l'expérience de Bernoulli obtenir une carte différente des précédentes, son paramètre est $p = 1 - \frac{i-1}{n}$. Y_i compte le nombre d'essais avant de réussir cette expérience donc Y_i suit une loi géométrique de raison $1 - \frac{i-1}{n}$.

$$\textcircled{5} E[X_n] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{i-1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n - (i-1)} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{k}.$$

- ⑥ $E[X_n] \leq n(1 + \ln n)$. S'il y a 10 cartes :
 $E[X_{10}] \leq 10(1 + \ln 10) \approx 33$ et s'il en a 30 :
 $E[X_{30}] \leq 30(1 + \ln 30) \approx 132$

Lois de probabilités classiques

Loi normale :

Une loi normale est une loi de probabilité continue, contrairement aux lois vues jusqu'à présent qui étaient discrètes. Sans rentrer dans les détails, une variable aléatoire à densité X est définie par une intégrale du type $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, où x s'appelle **densité de probabilités** de X .

Il existe de nombreuses lois continues, permettant de modéliser par exemple des températures, le temps, etc. Ici nous ne nous intéresserons qu'aux lois normales.

Une variable aléatoire à densité X suit une **loi normale** de moyenne μ et de variance σ^2 si

$$P(a < X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Il n'est pas nécessaire de retenir la formule. La loi normale s'appelle aussi **loi de Gauss**. On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ s'appelle **loi normale centrée réduite**.

Nous n'étudierons pas plus en détail les lois normales, il faut juste retenir qu'elles ont des propriétés bien connues.

Le résultat suivant, connu sous le nom de **Théorème central limite**, explique l'importance des lois normales.

Théorème 60

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et de variance σ^2 . Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors

- $E[S_n] = n\mu$,
- $\text{var}(S_n) = n\sigma^2$,
- Quand n grandit, $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ se comporte comme $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous ne définirons pas plus formellement ce que veut dire se *comporte comme*. Les deux premiers points sont des conséquences directes de la linéarité des espérances et des variances (pour les variables indépendantes). Le troisième point donne beaucoup plus d'information et permet de donner de quantifier le comportement.

**Merci de votre attention,
bonne fin de journée et la semaine prochaine !!**