Cours-TD Probabilités Statistiques

S3

2 Décembre 2020

Loi de Bernoulli :
Soit Ω un univers. On appelle **variable aléatoire de Bernoulli** une variable aélatoire X à valeur dans $\{0, 1\}$. La valeur $p = X^{-1}(\{1\})$, c'est-à-dire la probabilité que $X(s)$ vaille 1, est appellé **paramètre de la variable aléatoire de Bernoulli**.

Si on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une pièce lancée tombe sur pile et 0 sinon est une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $\frac{1}{2}$ si la pièce est non biaisée.
Les variables aléatoires de Bernoulli caractérisent le succès d'une expérience aléatoire.

Loi de Bernoulli :
Soit Ω un univers. On appelle **variable aléatoire de Bernoulli** une variable alatoire X à valeur dans $\{0, 1\}$. La valeur $p = X^{-1}(\{1\})$, c'est-à-dire la probabilité que $X(s)$ vaille 1, est appellé **paramètre de la variable aléatoire de Bernoulli**.

Si on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une pièce lancée tombe sur pile et 0 sinon est une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $\frac{1}{2}$ si la pièce est non biaisée.
Les variables aléatoires de Bernoulli caractérisent le succès d'une expérience aléatoire.

Exercice 49

1. Que vaut l'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p ?
2. Que vaut la variance d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p ?

Lois de probabilités classiques

Exercice 49

1. Que vaut l'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p ?
2. Que vaut la variance d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p ?

1) $E[X] = p$
2) $\mathrm{var}(\mathrm{X}) = p(1-p)$

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. On considère l'expérience consistant à lancer deux fois de suite la pièce. Quelle est l'univers de cette expérience ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir $(pile, pile)$? d'obtenir $(pile, face)$? d'obtenir $(face, pile)$? d'obtenir $(face, face)$?
3. On considère la procédure qui consiste à répéter cette expérience jusqu'à obtenir $(pile, face)$ ou $(face, pile)$. Dans le premier cas on retourne pile, dans le second, on retourne face. Si cette procédure s'arrête, qu'elle est la probabilité d'obtenir pile ? face ?
4. Quelle est la probabilité (en fonction de p) que la procédure ne s'arrête pas au bout de 10 tentatives ?
5. En vous aidant de votre calculatrice, quelle est la probabilité que la procédure ne se soient pas arrêtée au bout de 10 coups si $p = 0,51$? si $p = 0,8$?

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. On considère l'expérience consistant à lancer deux fois de suite la pièce. Quelle est l'univers de cette expérience ?

1) $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$
2. Quelle est la probabilité d'obtenir $(pile, pile)$? d'obtenir $(pile, face)$? d'obtenir $(face, pile)$? d'obtenir $(face, face)$?

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$
2. Quelle est la probabilité d'obtenir $(pile, pile)$? d'obtenir $(pile, face)$? d'obtenir $(face, pile)$? d'obtenir $(face, face)$?

2) $P(pile, pile) = p^2$, $P(pile, face) = P(face, pile) = p(1-p)$ et $P(face, face) = (1-p)^2$.

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$
2. $P(pile, pile) = p^2$, $P(pile, face) = P(face, pile) = p(1-p)$ et $P(face, face) = (1-p)^2$.
3. On considère la procédure qui consiste à répéter cette expérience jusqu'à obtenir $(pile, face)$ ou $(face, pile)$. Dans le premier cas on retourne pile, dans le second, on retourne face. Si cette procédure s'arrête, qu'elle est la probabilité d'obtenir pile ? face ?

3) Si la procédure s'arrête, la probabilité d'obtenir pile est égale à la probabilité d'obtenir face est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Lois de probabilités classiques

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$
2. $P(pile, pile) = p^2$, $P(pile, face) = P(face, pile) = p(1-p)$ et $P(face, face) = (1-p)^2$.
3. $\dfrac{1}{2}$
4. Quelle est la probabilité (en fonction de p) que la procédure ne s'arrête pas au bout de 10 tentatives ?

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$
2. $P(pile, pile) = p^2$, $P(pile, face) = P(face, pile) = p(1-p)$ et $P(face, face) = (1-p)^2$.
3. $\dfrac{1}{2}$
4. Quelle est la probabilité (en fonction de p) que la procédure ne s'arrête pas au bout de 10 tentatives ?

4) $\left(p^2 + (1-p)^2\right)^{10}$

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$
2. $P(pile, pile) = p^2$, $P(pile, face) = P(face, pile) = p(1-p)$ et $P(face, face) = (1-p)^2$.
3. $\dfrac{1}{2}$
4. $\left(p^2 + (1-p)^2\right)^{10}$
5. En vous aidant de votre calculatrice, quelle est la probabilité que la procédure ne se soient pas arrêtée au bout de 10 coups si $p = 0.51$? si $p = 0,8$?

Exercice 50

On considère une pièce de monnaie biaisée, c'est-à-dire qu'elle ressort pile avec une probabilité p. On suppose $p \neq 0$, p inconnue.

1. $\Omega = \{(pile, pile); (pile, face); (face, pile); (face, face)\}$
2. $P(pile, pile) = p^2$, $P(pile, face) = P(face, pile) = p(1-p)$ et $P(face, face) = (1-p)^2$.
3. $\dfrac{1}{2}$
4. $\left(p^2 + (1-p)^2\right)^{10}$
5. En vous aidant de votre calculatrice, quelle est la probabilité que la procédure ne se soient pas arrêtée au bout de 10 coups si $p = 0.51$? si $p = 0,8$?

5) Si $p = 0.51$, on trouve environ : $0,1\%$
Si $p = 0,8$, on trouve environ : $2,1\%$

Loi binomiale :
Une **variable aléatoire binomiale** de paramètre p et n est variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur n expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Par exemple, si on lance une pièce avec succès quand pile sort, $X = k$ si sur les n lancés, on a obtenu k fois pile. Plus formellement, la variable aléatoire binomiale de paramètres p et n, notée $B(n, p)$ est définie par

$$P(X = j) = C_n^j p^j (1 - p)^{n-j}.$$

Loi binomiale :

Une **variable aléatoire binomiale** de paramètre p et n est variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur n expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Par exemple, si on lance une pièce avec succès quand pile sort, $X = k$ si sur les n lancés, on a obtenu k fois pile. Plus formellement, la variable aléatoire binomiale de paramètres p et n, notée $B(n, p)$ est définie par

$$P(X = j) = C_n^j p^j (1 - p)^{n-j}.$$

Exercice 51

On lance 20 fois une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 fois pile ? 10 fois pile ?

Exercice 51

On lance 20 fois une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 fois pile ? 10 fois pile ?

$$P(X = 1) = C_{20}^{1} \times 0,5^{1} \times 0,5^{19} \approx 1,9 \times 10^{-5}$$

Exercice 51

On lance 20 fois une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 fois pile ? 10 fois pile ?

$$P(X=1) = C_{20}^{1} \times 0,5^{1} \times 0,5^{19} \approx 1,9 \times 10^{-5}$$

$$P(X=10) = C_{20}^{10} \times 0,5^{10} \times 0,5^{10} \approx 0,176$$

Exercice 52

On considère un sac contenant 3 balles bleues et 2 balles rouges. On tire, avec remise et indépendamment 10 fois une balle du sac.

1. Quelle est la probabilité d'avoir tiré exactement 4 balle bleues ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir tiré autant de balles bleues que de balles rouges ?

Pour finir

Merci de votre attention,
bonne fin de journée et la semaine prochaine ! !