Cours-TD Probabilités Statistiques

S3

18 Novembre 2020

Rappel : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive, pour tout $a > 0$, on a

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

Exercice 38

En reprenant l'exemple du jeu de Belote, appliquer l'inégalité de Markov pour majorer $P(X \geq 10)$. Que vaut cette probabilité exactement ; comparer.

Ω est un jeu de 32 cartes, on peut définir la variable aléatoire Y (des points à la belotte) qui

- Associe 20 au valet de pique,
- Associe 14 au 9 de pique,
- Associe 11 à chaque as et 10 à chaque 10,
- Associe 4 à chaque roi, 3 à chaque dame et 2 aux valets (autre que pique),
- Associe 0 aux autres cartes.

Exercice 38

En reprenant l'exemple du jeu de Belote, appliquer l'inégalité de Markov pour majorer $P(X \geq 10)$. Que vaut cette probabilité exactement ; comparer.

$$P(X \geqslant 10) \leqslant \frac{E[X]}{10} = \frac{4,75}{10} = 0,475$$

Exercice 38

En reprenant l'exemple du jeu de Belote, appliquer l'inégalité de Markov pour majorer $P(X \geq 10)$. Que vaut cette probabilité exactement ; comparer.

$$P(X \geqslant 10) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 14) + P(X = 20) = \frac{10}{32} = 0,3125$$

Exercice 39

On considère n lancés de dés (à 6 faces) et, à chaque fois une variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le résultat du dé est 6 et 0 sinon. On considère aussi la variable aléatoire X du nombre de dés qui ont fait 6.

1. Exprimer X en fonction des X_i.
2. Que vaut $E[X_i]$? En déduire $E[X]$.
3. Utiliser l'inégalité de Markov pour majorer la probabilité que 3/4 des dés aient fait un 6.

Exercice 39

On considère n lancés de dés (à 6 faces) et, à chaque fois une variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le résultat du dé est 6 et 0 sinon. On considère aussi la variable aléatoire X du nombre de dés qui ont fait 6.

1. Exprimer X en fonction des X_i.
2. Que vaut $E[X_i]$? En déduire $E[X]$.
3. Utiliser l'inégalité de Markov pour majorer la probabilité que 3/4 des dés aient fait un 6.

1) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Exercice 39

On considère n lancés de dés (à 6 faces) et, à chaque fois une variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le résultat du dé est 6 et 0 sinon. On considère aussi la variable aléatoire X du nombre de dés qui ont fait 6.

1. Exprimer X en fonction des X_i.
2. Que vaut $E[X_i]$? En déduire $E[X]$.
3. Utiliser l'inégalité de Markov pour majorer la probabilité que 3/4 des dés aient fait un 6.

1) $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

2) $E[X_i] = \dfrac{1}{6}$ donc $E[X] = \dfrac{n}{6}$

Espérance

Exercice 39

On considère n lancés de dés (à 6 faces) et, à chaque fois une variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le résultat du dé est 6 et 0 sinon. On considère aussi la variable aléatoire X du nombre de dés qui ont fait 6.

1. Exprimer X en fonction des X_i.
2. Que vaut $E[X_i]$? En déduire $E[X]$.
3. Utiliser l'inégalité de Markov pour majorer la probabilité que 3/4 des dés aient fait un 6.

1) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

2) $E[X_i] = \frac{1}{6}$ donc $E[X] = \frac{n}{6}$

3) $P(X \geqslant \frac{3n}{4}) \leqslant \frac{E[X]}{\frac{3n}{4}} = \frac{n}{6} \times \frac{4}{3n} = \frac{2}{9}$

Espérance

Espérance et indépendance

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

Exercice 40

On lance n fois un dé à 6 faces. En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de la probabilité que le produit des résultats obtenus soit supérieur à 4^n.

Exercice 40

On lance n fois un dé à 6 faces. En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de la probabilité que le produit des résultats obtenus soit supérieur à 4^n.

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

Exercice 40

On lance n fois un dé à 6 faces. En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de la probabilité que le produit des résultats obtenus soit supérieur à 4^n.

$E(X) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$ car les résultats des lancers sont tous indépendants 2 à 2.

Espérance

Exercice 40

On lance n fois un dé à 6 faces. En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de la probabilité que le produit des résultats obtenus soit supérieur à 4^n.

$$E(X) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(X_i) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} \text{ donc } E(X) = \left(\frac{7}{2}\right)^n.$$

Exercice 40

On lance n fois un dé à 6 faces. En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de la probabilité que le produit des résultats obtenus soit supérieur à 4^n.

$$E(X) = \left(\frac{7}{2}\right)^n$$

L'inégalité de Markov donne :

$$P(X \geqslant 4^n) \leqslant \frac{E(X)}{4^n} = \left(\frac{7}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

Exercice 41

On considère $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ avec équiprobabilité et la variable aléatoire $X(x) = x$ (on prend la valeur du dé).

1. Que vaut $E[X]^2$?
2. Que vaut $E[X^2]$?
3. Comparer les deux.

Exercice 41

On considère $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ avec équiprobabilité et la variable aléatoire $X(x) = x$ (on prend la valeur du dé).

1. Que vaut $E[X]^2$?
2. Que vaut $E[X^2]$?
3. Comparer les deux.

1) $E[X]^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

Espérance

Exercice 41

On considère $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ avec équiprobabilité et la variable aléatoire $X(x) = x$ (on prend la valeur du dé).

1. Que vaut $E[X]^2$?
2. Que vaut $E[X^2]$?
3. Comparer les deux.

1) $E[X]^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} = 12,25$

2) $E[X^2] = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6} \approx 15,2$

Espérance

Exercice 41

On considère $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ avec équiprobabilité et la variable aléatoire $X(x) = x$ (on prend la valeur du dé).

1. Que vaut $E[X]^2$?
2. Que vaut $E[X^2]$?
3. Comparer les deux.

1) $E[X]^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} = 12,25$

2) $E[X^2] = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6} \approx 15,2$

3) On trouve $E[X^2] \geq (E[X])^2$

Proposition 42

Soit X une variable aléatoire, on a : $E[X^2] \geq (E[X])^2$.

Variance

Deux variables aléatoires de même espérance peuvent avoir des « comportements »très différents. Afin de mieux comprendre et décrire une variable aléatoire, nous allons introduire la notion de *variance*.

Définition 43

Soit X une variable aléatoire et (Ω, P) un espace de probabilités. On définit la *variance* de X, notée $\mathrm{var}_P(X)$ comme :

$$\mathrm{var}_P(X) = E_P[(X - E_P[X])^2] = E_P[X^2] - (E_P[X])^2.$$

La **déviation standard** de X, notée $\sigma(X)$ est définie par

$$\sigma(x) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}.$$

Variance

Définition 43

Soit X une variable aléatoire et (Ω, P) un espace de probabilités. On définit la *variance* de X, notée $\mathrm{var}_P(X)$ comme :

$$\mathrm{var}_P(X) = E_P[(X - E_P[X])^2] = E_P[X^2] - (E_P[X])^2.$$

La **déviation standard** de X, notée $\sigma(X)$ est définie par

$$\sigma(x) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}.$$

On considère à nouveau un dé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) avec un lancé équiprobable. On a $E[X] = \frac{7}{2}$. Par ailleurs $E[X^2] = \frac{91}{6}$.
On a donc $\mathrm{var}(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2.9$.
Par ailleurs $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.7$.

Pour finir

Merci de votre attention,
bonne fin de journée et la semaine prochaine ! !