TD3 - Représentation des entiers naturels et opérations arithmétiques

1 Représentation des entiers naturels

1.1 Codage

① Combien d'entiers naturels peut-on coder en binaire sur 1 octet ?

② Combien de bits faut-il pour représenter 65793 entiers naturels différents en binaire ?

Correction

① Un octet contient 8 bits, on peut donc coder $2^8 = 256$ nombres entiers naturels.

② Avec b bits on peut représenter 2^b entiers naturels différents, pour coder m entiers, il faut donc n bits tels que :

$$2^{n-1} < m \leq 2^n \Leftrightarrow n - 1 < \log_2 m \leq n$$

d'où $n = \lceil \log_2 m \rceil \left(\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}; \alpha^n = \exp^{n \ln \alpha}\right)$.
Pour $m = 65793$, on obtient $n = \lceil \log_2 65793 \rceil = 17$.

1.2 Code de Gray

- Méthode de construction basique
  — Pour passer d'une ligne à la suivante, on inverse le bit le plus à droite possible qui introduit un nombre nouveau.

  ① Donner le code de Gray sur 3 bits en partant de $0 = 000$.

  Correction

Décimal	Gray	Décimal	Gray
0	000	4	110
1	001	5	111
2	011	6	101
3	010	7	100

- Méthode de construction par symétrie
  — Au départ, sur 1 bit, on utilise le code binaire naturel.
  — Lorsque l'on ajoute 1 bit supplémentaire, les nombres existants sont "symétrisés" comme dans un miroir (phénomène de réflexion, d'où l'autre nom code binaire réfléchi) pour obtenir les nouveaux nombres.
  — On ajoute 0 au début des nombres existants et 1 au début des nouveaux nombres.

1 bit		*2 bits*		
Decimal	Gray	Decimal		Gray
0	0	0	0	0 0
1	1	1	1	0 1
		2	1	1 1
		3	0	1 0

② Donner le code de Gray sur 4 bits.

Correction

Décimal	Gray	Décimal	Gray
0	0000	15	1000
1	0001	14	1001
2	0011	13	1011
3	0010	12	1010
4	0110	11	1110
5	0111	10	1111
6	0101	9	1101
7	0100	8	1100

2 Opérations arithmétiques

2.1 Addition

① Coder en binaire sur un octet les entiers 187 et 93, puis effectuer l'addition binaire des entiers ainsi codés. Vérifier que le résultat est correct.

② Même question avec 118 et 53.

Correction

① $187_{10} = 10111011_2$
$93_{10} = 1011101_2$

$$\begin{array}{ccccccccccl}
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & (187) \\
+ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & (93) \\
\hline
 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & (24) \\
 & & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \textit{(retenues)}
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits 11000_2, ce qui n'est pas correct.

② $118_{10} = 1110110_2$
$53_{10} = 110101_2$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & (118) \\
+ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & (53) \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & (171) \\
 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \textit{(retenues)}
\end{array}
$$

On obtient donc sur 8 bits 10101011_2.

2.2 Soustraction

① On considère les mêmes entiers que précédemment, mais cette fois il faut effectuer la soustraction des entiers. Soit calculer $187 - 93$;

② puis $118 - 53$.

③ Pour finir, calculer $14 - 7$.

Correction

① $187_{10} = 10111011_2$
$93_{10} = 1011101_2$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & (187) \\
- & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & (93) \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (94) \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \textit{(retenues)}
\end{array}
$$

On obtient donc sur 8 bits 1011110_2.

② $118_{10} = 1110110_2$
$53_{10} = 110101_2$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & (118) \\
- & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & (53) \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (65) \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \textit{(retenues)}
\end{array}
$$

On obtient donc sur 8 bits 01000001_2.

2.3 Multiplication

① Construire la table de multiplication.

② Essayer de poser la multiplication de 6 par 5.

③ Coder en binaire les entiers 87 et 49, puis effectuer la multiplication binaire des entiers ainsi codés. Même question pour 169 et 76.

Correction

① Table de multiplication

Opérandes		Multiplication
x	y	x × y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

② Multiplication de 6 par 5

$$
\begin{array}{cccccc l}
 & & 1 & 1 & 0 & (6) & \textit{(Multiplicande)} \\
 & \times & 1 & 0 & 1 & (5) & \textit{(Multiplicateur)} \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & & & \\
+ & 1 & 1 & 0 & & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (30) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 1 & 0 & (6) \\
 & \times & 1 & 0 & 1 & (5) \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & \\
+ & 1 & 1 & 0 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (30)
\end{array}
$$

La multiplication consiste donc en une succession de recopiages du multiplicande, de décalages et d'additions.

③ Multiplications (retenues en gras)

— 87×49

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & (87) \\
 & & & & & \times & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & (49) \\
\hline
 & & & & & & 1^{\mathbf{1}} & 0^{\mathbf{1}} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & 1^{\mathbf{1}} & 0^{\mathbf{1}} & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
+ & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & (4263)
\end{array}
$$

On obtient $1000010100111_2 = 4263_{10}$.

— 169×76

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & (169) \\
 & & & & & & \times & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & (76) \\
\hline
 & & & & & & & 0^{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & 1^{\mathbf{1}} & 0^{\mathbf{1}} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & & & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
+ & 1 & 0^{\mathbf{1}} & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & (12844)
\end{array}
$$

On obtient $11001000101100_2 = 12844_{10}$.