

TD2 - Numération, changement de base

1 Numération

On considère la base 14.

- ① Donner l'ensemble des chiffres de ce système de numération.
- ② Donner en comptant en base 14 la représentation dans cette base des nombres décimaux 6, 17 et 25.
- ③ Combien de nombres peut-on représenter avec 4 chiffres et donner l'expression permettant de calculer la valeur décimale (en base 10) d'un tel nombre $c_3c_2c_1c_0$.

Correction

- ① Dans un système de base b , un nombre est représenté par la suite de chiffres $c_nc_{n-1} \dots c_0$ telle que $(c_i)_{10} \in \{0, \dots, b-1\}$. Chaque c_i ne devant correspondre qu'à un seul chiffre, lorsque $(c_i)_{10} \geq 10$ on utilise une lettre majuscule comme chiffre en commençant avec A. En base 14 on a donc $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D\}$.

- ② Représentation de nombres décimaux

Decimal	Base 14	Decimal	Base 14
0	0	14	10
1	1	15	11
2	2	16	12
3	3	17	↔ 13
4	4	18	14
5	5	19	15
6	↔ 6	20	16
7	7	21	17
8	8	22	18
9	9	23	19
10	A	24	1A
11	B	25	↔ 1B
12	C	26	1C
13	D	27	1D

- ③ Chaque chiffre $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D\}$, il peut donc prendre 14 valeurs possibles. Aussi, un nombre $c_3c_2c_1c_0$ aura $14 \times 14 \times 14 \times 14 = 14^4 = 38416$ valeurs possibles. Calcul de la valeur décimale N correspondant à $c_3c_2c_1c_0$ en base 14.

$$\begin{aligned}
 (c_3c_2c_1c_0)_{13} &= (c_3)_{10} \times 14^3 + (c_2)_{10} \times 14^2 + (c_1)_{10} \times 14^1 + (c_0)_{10} \times 14^0 = N \\
 &= (c_3)_{10} \times 2744 + (c_2)_{10} \times 196 + (c_1)_{10} \times 14 + (c_0)_{10} \times 1 = N
 \end{aligned}$$

- c_3 a pour poids 2744 ;
- c_2 a pour poids 196 ;
- c_1 a pour poids 14 ;
- c_0 a pour poids 1.

2 Changement de base

2.1 Conversions en base 10

Donner la valeur décimale des nombres entiers suivants :

- ① 110011_2 et 1011010_2 ;
- ② 56324_8 et 1703_8 ;
- ③ $B5A97_{12}$;
- ④ $CE94_{16}$ et $3F5A_{16}$.

Correction

①

$$\begin{aligned}
 110011_2 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 32 + 16 + 2 + 1 \\
 &= 51_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1011010_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 64 + 16 + 8 + 2 \\
 &= 90_{10}
 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
 56324_8 &= 5 \times 8^4 + 6 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 4 \times 8^0 \\
 &= 5 \times 4096 + 6 \times 512 + 3 \times 64 + 2 \times 8 + 4 \times 1 \\
 &= 20480 + 3072 + 192 + 16 + 4 \\
 &= 23764_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1703_8 &= 1 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 3 \times 8^0 \\
 &= 512 + 448 + 0 + 3 \\
 &= 963_{10}
 \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
 B5A97_{12} &= (B)_{10} \times 12^4 + (5)_{10} \times 12^3 + (A)_{10} \times 12^2 + (9)_{10} \times 12^1 + (7)_{10} \times 12^0 \\
 &= 11 \times 12^4 + 5 \times 12^3 + 10 \times 12^2 + 9 \times 12^1 + 7 \times 12^0 \\
 &= 11 \times 20736 + 5 \times 1728 + 10 \times 144 + 9 \times 12 + 7 \times 1 \\
 &= 228096 + 8640 + 1440 + 108 + 7 \\
 &= 238291_{10}
 \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
 CE94_{16} &= 12 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 4 \times 16^0 \\
 &= 12 \times 4096 + 14 \times 256 + 9 \times 16 + 4 \times 1 \\
 &= 49152 + 3584 + 144 + 4 \\
 &= 52884_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3F5A_{16} &= 3 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 10 \times 16^0 \\
 &= 3 \times 4096 + 15 \times 256 + 5 \times 16 + 10 \times 1 \\
 &= 12288 + 3840 + 80 + 10 \\
 &= 16218_{10}
 \end{aligned}$$

2.2 Convertir 249_{10} en bases 2 et 14

$$\begin{array}{r}
 249 \overline{) 2} \\
 1 \overline{) 124} \overline{) 2} \\
 0 \overline{) 62} \overline{) 2} \\
 0 \overline{) 31} \overline{) 2} \\
 1 \overline{) 15} \overline{) 2} \\
 1 \overline{) 7} \overline{) 2} \\
 1 \overline{) 3} \overline{) 2} \\
 1 \overline{) 1} \overline{) 2} \\
 1 \overline{) 0}
 \end{array}$$

- On a donc $249_{10} = 11111001_2$.

$$\begin{array}{r}
 249 \overline{) 1} \\
 124 \overline{) 0} \\
 62 \overline{) 0} \\
 31 \overline{) 1} \\
 15 \overline{) 1} \\
 7 \overline{) 1} \\
 3 \overline{) 1} \\
 1 \overline{) 1} \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 249 \overline{) 11} \\
 17 \overline{) 3} \\
 1 \overline{) 1} \\
 0
 \end{array}$$

$249_{10} = 13B_{14}$

- On obtient $249_{10} = 13B_{14}$.

2.3 Coder l'entier 2766 successivement en base 2, 8, 16 ; 294 en base 16

2766	0	2766	6	2766	14
1383	1				
691	1				
345	1	345	1		
172	0			172	12
86	0				
43	1	43	3		
21	1				
10	0			10	10
5	1	5	5		
2	0				
1	1				
0		0		0	

- On obtient ainsi pour 2766

$$\begin{aligned} 2766 &= 101011001110_2 \\ &= 5 \quad 3 \quad 1 \quad 6_8 \\ &= A \quad C \quad E_{16} \end{aligned}$$

- alors que pour 294 on a

$$\begin{aligned} 294 &= 100100110_2 \\ &= 1\ 2\ 6_{16} \end{aligned}$$

2.4 Donner la valeur décimale du nombre 10110, dans le cas d'un codage en base 2, 8 ou 16

- $10110_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 16 + 4 + 2 = 22_{10}$.
- $10110_8 = 1 \times 8^4 + 1 \times 8^2 + 1 \times 8^1 = 4096 + 64 + 8 = 4168_{10}$.
- $10110_{16} = 1 \times 16^4 + 1 \times 16^2 + 1 \times 16^1 = 65536 + 256 + 16 = 65808_{10}$.

2.5 Conversion rapide hexadécimal vers binaire / octal et binaire vers octal / hexadécimal

- $7D9B24_{16}$ en bases 2 et 8

Diagram illustrating a 16-bit bus system. The bus is divided into four 4-bit segments, each labeled with a letter: D, 9, B, and 2. The bus is also labeled with bit positions 0 through 15. The bus is divided into four 4-bit segments, each labeled with a letter: D, 9, B, and 2. The bus is also labeled with bit positions 0 through 15. The bus is divided into four 4-bit segments, each labeled with a letter: D, 9, B, and 2. The bus is also labeled with bit positions 0 through 15.

- 10011010101_2 en bases 8 et 16

Diagram illustrating a 16-bit data word (1001101010101016) with bit positions 0 to 15. The word is divided into four 4-bit segments, each labeled with a value: 4, D, 5, and 16. The bit positions are also labeled with values: 2, 3, 2, and 5, with an additional 8 below the final segment.