TD3 - Représentation des entiers naturels et opérations arithmétiques

1 Représentation des entiers naturels

1.1 Codage

① Combien d'entiers naturels peut-on coder en binaire sur 2 octets ?

② Combien de bits faut-il pour représenter 260000 entiers naturels différents en binaire ?

Correction

① Deux octets correspondent à 16 bits, on peut donc coder $2^{16} = 65536$ entiers naturels. Soit de `0000000000000000b` à `1111111111111111b`, ou de `0000h` à `0FFFFh`, en notation assembleur.

② Avec b bits, on peut représenter 2^b entiers naturels différents, pour coder m entiers, il faut donc n bits tels que :

$$2^{n-1} < m \leq 2^n \Leftrightarrow n - 1 < \log_2 m \leq n$$

d'où $n = \lceil \log_2 m \rceil \left(\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}; a^\alpha = \exp^{\alpha \ln a} \right)$. Pour $m = 260000$, on obtient la valeur $n = \lceil \log_2 260000 \rceil = 18$.
On peut également calculer les puissances de 2 successives jusqu'à trouver celle dont la valeur dépasse m, l'exposant donne alors la valeur de n.

1.2 Code de Gray

- Méthode de construction basique Pour passer d'une ligne à la suivante, on inverse le bit le plus à droite possible qui introduit un nombre nouveau.

  ① Donner le code de Gray sur 3 bits en partant de $0 = 000$.

  Correction

Décimal	Gray	Décimal	Gray
0	000	4	110
1	001	5	111
2	011	6	101
3	010	7	100

- Méthode de construction par symétrie
  — Au départ, sur 1 bit, on utilise le code binaire naturel.
  — Lorsque l'on ajoute 1 bit supplémentaire, les nombres existants sont "symétrisés" comme dans un miroir (phénomène de réflexion, d'où l'autre nom de code binaire réfléchi) pour obtenir les nouveaux nombres.

— On ajoute 0 au début des nombres existants et 1 au début des nouveaux nombres.

1 bit			*2 bits*		
Decimal	Gray		Decimal		Gray
0	0		0	0	00
1	1		1	1	01
			2	1	11
			3	0	10

② Donner le code de Gray sur 4 bits.

Correction

Décimal	Gray	Décimal	Gray
0	0000	15	1000
1	0001	14	1001
2	0011	13	1011
3	0010	12	1010
4	0110	11	1110
5	0111	10	1111
6	0101	9	1101
7	0100	8	1100

2 Opérations arithmétiques

2.1 Addition

① Coder en binaire sur un octet les entiers 107 et 58, puis effectuer l'addition binaire des entiers ainsi codés. Vérifier que le résultat est correct.

② Même question avec 171 et 97.

Correction

① $107_{10} = 1101011_2$
$58_{10} = 111010_2$

$$\begin{array}{cccccccccl}
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & (107) \\
 & + & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & (58) \\
\hline
 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & (165) \\
 & & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \textit{(retenues)}
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits 10100101_2.

② $171_{10} = 10101011_2$
$97_{10} = 1100001_2$

$$\begin{array}{rl}
\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 & (171) \\
+ \quad\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 & (97) \\
\hline
\mathbf{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 & (12) \\
\mathbf{1}\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 & \textit{(retenues)}
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits 00001100_2, ce qui n'est pas correct.

2.2 Soustraction

① On considère les mêmes entiers que précédemment, mais cette fois il faut effectuer la soustraction des entiers. Soit calculer $107 - 58$;

② puis $165 - 94$.

③ Pour finir, calculer $14 - 7$.

Correction

① $107_{10} = 1101011_2$
$58_{10} = 111010_2$

$$\begin{array}{rl}
1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 & (107) \\
- \quad 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 & (58) \\
\hline
0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 & (49) \\
0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 & \textit{(retenues)}
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits 00110001_2.

② $165_{10} = 10100101_2$
$94_{10} = 1011110_2$

$$\begin{array}{rl}
1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 & (165) \\
- \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 & (94) \\
\hline
0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 & (71) \\
0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 & \textit{(retenues)}
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits 01000111_2.

2.3 Multiplication

① Construire la table de multiplication.

② Essayer de poser la multiplication de 6 par 5.

③ Coder en binaire les entiers 79 et 58, puis effectuer la multiplication binaire des entiers ainsi codés. Même question pour 169 et 76.

Correction

① Table de multiplication

Opérandes		Multiplication
x	y	x × y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

② Multiplication de 6 par 5

$$\begin{array}{rcccccl}
 & & & 1 & 1 & 0 & (6)\ \textit{(Multiplicande)} \\
 & & \times & 1 & 0 & 1 & (5)\ \textit{(Multiplicateur)} \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 0 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & 1 & 1 & 0 & & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & (30)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccccl}
 & & 1 & 1 & 0 & (6) \\
 & \times & 1 & 0 & 1 & (5) \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & \\
+\,1 & 1 & 0 & & & \\
\hline
1\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (30)
\end{array}$$

La multiplication consiste donc en une succession de recopiages du multiplicande, de décalages et d'additions.

③ Multiplications (retenues en gras)

— 79 × 58

$$\begin{array}{cccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & (79) \\
 & & & & & \times & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & (58) \\
\hline
 & & & & & & 0^{\mathbf{1}} & 0 & 0^{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & 1 & 0^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & 1^{\mathbf{1}} & 0^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 0^{\mathbf{1}} & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
+ & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & (4582)
\end{array}$$

On obtient $1000111100110_2 = 4582_{10}$.

— 169 × 76

$$\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & (169) \\
 & & & & & & \times & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & (76) \\
\hline
 & & & & & & 0^{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & 1^{\mathbf{1}} & 0^{\mathbf{1}} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
+\,1 & 0^{\mathbf{1}} & 1^{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & (12844)
\end{array}$$

On obtient $11001000101100_2 = 12844_{10}$.