

TD2 - Numération, changement de base

1 Numération

On considère la base 13.

- ① Donner l'ensemble des chiffres de ce système de numération.
- ② Donner en comptant en base 13 la représentation dans cette base des nombres décimaux 6, 17 et 25.
- ③ Combien de nombres peut-on représenter avec 4 chiffres et donner l'expression permettant de calculer la valeur décimale (en base 10) d'un tel nombre $c_3c_2c_1c_0$.

Correction

- ① Dans un système de base b , un nombre est représenté par la suite de chiffres $c_n c_{n-1} \dots c_0$ telle que $(c_i)_{10} \in \{0, \dots, b-1\}$. Chaque c_i ne devant correspondre qu'à un seul chiffre, lorsque $(c_i)_{10} \geq 10$ on utilise une lettre majuscule comme chiffre en commençant avec A. En base 13 on a donc $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C\}$.
- ② Représentation de nombres décimaux

Decimal	Base 13	Decimal	Base 13
0	0	14	11
1	1	15	12
2	2	16	13
3	3	17	↔ 14
4	4	18	15
5	5	19	16
6	↔ 6	20	17
7	7	21	18
8	8	22	19
9	9	23	1A
10	A	24	1B
11	B	25	↔ 1C
12	C	26	20
13	10	27	21

- ③ Chaque chiffre $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C\}$, il peut donc prendre 13 valeurs possibles. Aussi, un nombre $c_3c_2c_1c_0$ aura $13 \times 13 \times 13 \times 13 = 13^4 = 28561$ valeurs possibles. Calcul de la valeur décimale N correspondant à $c_3c_2c_1c_0$ en base 13.

$$\begin{aligned}
 (c_3c_2c_1c_0)_{13} &= (c_3)_{10} \times 13^3 + (c_2)_{10} \times 13^2 + (c_1)_{10} \times 13^1 + (c_0)_{10} \times 13^0 = N \\
 &= (c_3)_{10} \times 2197 + (c_2)_{10} \times 169 + (c_1)_{10} \times 13 + (c_0)_{10} \times 1 = N
 \end{aligned}$$

- c_3 a pour poids 2197 ;
- c_2 a pour poids 169 ;
- c_1 a pour poids 13 ;
- c_0 a pour poids 1.

2 Changement de base

2.1 Conversions en base 10

Donner la valeur décimale des nombres entiers suivants :

- ① 101110_2 et 1101011_2 ;
- ② 57621_8 et 2403_8 ;
- ③ $A6B37_{12}$;
- ④ $DE75_{16}$ et $9F4E_{16}$.

Correction

①

$$\begin{aligned} 101110_2 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 \\ &= 32 + 8 + 4 + 2 \\ &= 46_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1101011_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 64 + 32 + 8 + 2 + 1 \\ &= 107_{10} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} 57621_8 &= 5 \times 8^4 + 7 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 1 \times 8^0 \\ &= 5 \times 4096 + 7 \times 512 + 6 \times 64 + 2 \times 8 + 1 \times 1 \\ &= 20480 + 3584 + 384 + 16 + 1 \\ &= 24465_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2403_8 &= 2 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 3 \times 8^0 \\ &= 1024 + 256 + 0 + 3 \\ &= 1283_{10} \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} A6B37_{12} &= (A)_{10} \times 12^4 + (6)_{10} \times 12^3 + (B)_{10} \times 12^2 + (3)_{10} \times 12^1 + (7)_{10} \times 12^0 \\ &= 10 \times 12^4 + 6 \times 12^3 + 11 \times 12^2 + 3 \times 12^1 + 7 \times 12^0 \\ &= 10 \times 20736 + 6 \times 1728 + 11 \times 144 + 3 \times 12 + 7 \times 1 \\ &= 207360 + 10368 + 1584 + 36 + 7 \\ &= 219355_{10} \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
 DE75_{16} &= 13 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 7 \times 16^1 + 5 \times 16^0 \\
 &= 13 \times 4096 + 14 \times 256 + 7 \times 16 + 5 \times 1 \\
 &= 53248 + 3584 + 112 + 5 \\
 &= 56949_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9F4E_{16} &= 9 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 4 \times 16^1 + 14 \times 16^0 \\
 &= 9 \times 4096 + 15 \times 256 + 4 \times 16 + 14 \times 1 \\
 &= 36864 + 3840 + 64 + 14 \\
 &= 40782_{10}
 \end{aligned}$$

2.2 Convertir 319_{10} en bases 2 et 12

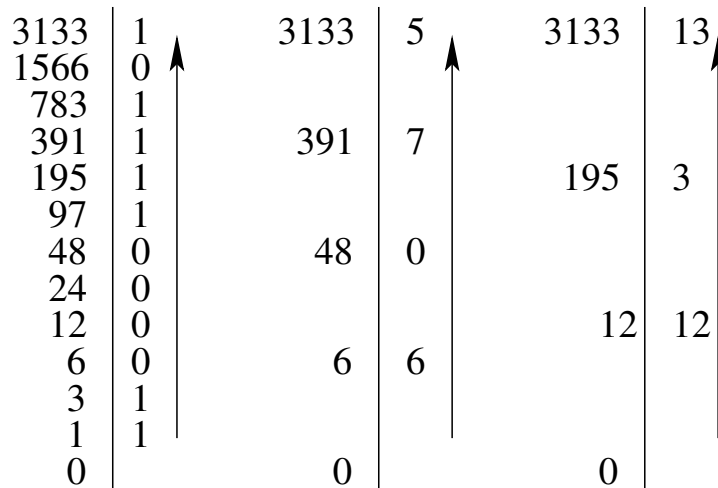
$$\begin{array}{r}
 319 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right| 159 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right| 79 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right| 39 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right| 19 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right| 9 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right| 4 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 0 \end{array} \right| 2 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 0 \end{array} \right| 1 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right| 0
 \end{array}$$

- On a donc $319_{10} = 100111111_2$.

$$\begin{array}{r}
 319 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 159 \\ 79 \\ 39 \\ 19 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \uparrow \end{array} \\
 319 \left| \begin{array}{l} 7 \\ 26 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 7 \\ 2 \\ 2 \\ \uparrow \\ \end{array} \\
 319_{10} = 227_{12}
 \end{array}$$

- On obtient $319_{10} = 227_{12}$.

2.3 Coder l'entier 3133 successivement en base 2, 8, 16 ; 294 en base 16



- On obtient ainsi pour 3133

$$\begin{aligned}
 3133 &= 110000111101_2 \\
 &= 6\ 0\ 7\ 5_8 \\
 &= C\ 3\ D_{16}
 \end{aligned}$$

- alors que pour 294 on a

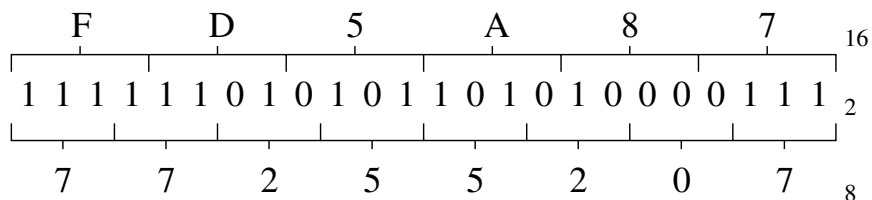
$$\begin{aligned}
 294 &= 100100110_2 \\
 &= 1\ 2\ 6_{16}
 \end{aligned}$$

2.4 Donner la valeur décimale du nombre 11010, dans le cas d'un codage en base 2, 8 ou 16

- $11010_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 = 16 + 8 + 2 = 26_{10}$.
- $11010_8 = 1 \times 8^4 + 1 \times 8^3 + 1 \times 8^1 = 4096 + 512 + 8 = 4616_{10}$.
- $11010_{16} = 1 \times 16^4 + 1 \times 16^3 + 1 \times 16^1 = 65536 + 4096 + 16 = 69648_{10}$.

2.5 Conversion rapide hexadécimal vers binaire / octal et binaire vers octal / hexadécimal

- $FD5A87_{16}$ en bases 2 et 8



- 100110101_2 en bases 8 et 16

