TD2 - Numération, changement de base

1 Numération

On considère la base 13.

① Donner l'ensemble des chiffres de ce système de numération.

② Donner en comptant en base 13 la représentation dans cette base des nombres décimaux 6, 17 et 25.

③ Combien de nombres peut-on représenter avec 4 chiffres et donner l'expression permettant de calculer la valeur décimale (en base 10) d'un tel nombre $c_3c_2c_1c_0$.

Correction

① Dans un système de base b, un nombre est représenté par la suite de chiffres $c_nc_{n-1}\dots c_0$ telle que $(c_i)_{10} \in \{0,\dots,b-1\}$. Chaque c_i ne devant correspondre qu'à un seul chiffre, lorsque $(c_i)_{10} \geq 10$ on utilise une lettre majuscule comme chiffre en commençant avec A. En base 13 on a donc $c_i \in \{0,1,2,\dots,9,A,B,C\}$.

② Représentation de nombres décimaux

Decimal		Base 13	Decimal		Base 13
0		0	14		11
1		1	15		12
2		2	16		13
3		3	17	$\longleftrightarrow$	14
4		4	18		15
5		5	19		16
6	$\longleftrightarrow$	6	20		17
7		7	21		18
8		8	22		19
9		9	23		1A
10		A	24		1B
11		B	25	$\longleftrightarrow$	1C
12		C	26		20
13		10	27		21

③ Chaque chiffre $c_i \in \{0,1,2,\dots,9,A,B,C\}$, il peut donc prendre 13 valeurs possibles. Aussi, un nombre $c_3c_2c_1c_0$ aura $13 \times 13 \times 13 \times 13 = 13^4 = 28561$ valeurs possibles. Calcul de la valeur décimale N correspondant à $c_3c_2c_1c_0$ en base 13.

$$\begin{aligned}(c_3c_2c_0c_1)_{13} &= (c_3)_{10} \times 13^3 + (c_2)_{10} \times 13^2 + (c_1)_{10} \times 13^1 + (c_0)_{10} \times 13^0 = N \\ &= (c_3)_{10} \times 2197 + (c_2)_{10} \times 169 + (c_1)_{10} \times 13 + (c_0)_{10} \times 1 = N\end{aligned}$$

— c_3 a pour poids 2197 ;
— c_2 a pour poids 169 ;
— c_1 a pour poids 13 ;
— c_0 a pour poids 1.

2 Changement de base

2.1 Conversions en base 10

Donner la valeur décimale des nombres entiers suivants :

① 101110_2 et 1101011_2 ;

② 57621_8 et 2403_8 ;

③ $A6B37_{12}$;

④ $DE75_{16}$ et $9F4E_{16}$.

Correction

①

$$\begin{aligned} 101110_2 &= 1\times 2^5 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 \\ &= 32+8+4+2 \\ &= 46_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1101011_2 &= 1\times 2^6 + 1\times 2^5 + 1\times 2^3 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 \\ &= 64+32+8+2+1 \\ &= 107_{10} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} 57621_8 &= 5\times 8^4 + 7\times 8^3 + 6\times 8^2 + 2\times 8^1 + 1\times 8^0 \\ &= 5\times 4096 + 7\times 512 + 6\times 64 + 2\times 8 + 1\times 1 \\ &= 20480+3584+384+16+1 \\ &= 24465_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2403_8 &= 2\times 8^3 + 4\times 8^2 + 0\times 8^1 + 3\times 8^0 \\ &= 1024+256+0+3 \\ &= 1283_{10} \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} A6B37_{12} &= (A)_{10}\times 12^4 + (6)_{10}\times 12^3 + (B)_{10}\times 12^2 + (3)_{10}\times 12^1 + (7)_{10}\times 12^0 \\ &= 10\times 12^4 + 6\times 12^3 + 11\times 12^2 + 3\times 12^1 + 7\times 12^0 \\ &= 10\times 20736 + 6\times 1728 + 11\times 144 + 3\times 12 + 7\times 1 \\ &= 207360+10368+1584+36+7 \\ &= 219355_{10} \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
DE75_{16} &= 13 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 7 \times 16^1 + 5 \times 16^0 \\
&= 13 \times 4096 + 14 \times 256 + 7 \times 16 + 5 \times 1 \\
&= 53248 + 3584 + 112 + 5 \\
&= 56949_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9F4E_{16} &= 9 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 4 \times 16^1 + 14 \times 16^0 \\
&= 9 \times 4096 + 15 \times 256 + 4 \times 16 + 14 \times 1 \\
&= 36864 + 3840 + 64 + 14 \\
&= 40782_{10}
\end{aligned}$$

2.2 Convertir 319_{10} en bases 2 et 12

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|r|r|r|l}
319 & 2 & & & & & & & & & \\
1 & 159 & 2 & & & & & & & & \\
 & 1 & 79 & 2 & & & & & & & \\
 & & 1 & 39 & 2 & & & & & & \\
 & & & 1 & 19 & 2 & & & & & \\
 & & & & 1 & 9 & 2 & & & & \\
 & & & & & 1 & 4 & 2 & & & \\
 & & & & & & 0 & 2 & 2 & & \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 2 & \\
 & & & & & & & & 1 & 0 &
\end{array}$$

- On a donc $319_{10} = 100111111_2$.

$$\begin{array}{r|l}
319 & 1 \\
159 & 1 \\
79 & 1 \\
39 & 1 \\
19 & 1 \\
9 & 1 \\
4 & 0 \\
2 & 0 \\
1 & 1 \\
0 &
\end{array}
\uparrow
\qquad
\begin{array}{r|l}
319 & 7 \\
26 & 2 \\
2 & 2 \\
0 &
\end{array}
\uparrow$$

$319_{10} = 227_{12}$

- On obtient $319_{10} = 227_{12}$.

2.3 Coder l'entier 3133 successivement en base 2, 8, 16 ; 294 en base 16

$$
\begin{array}{r|l}
3133 & 1 \\
1566 & 0 \\
783 & 1 \\
391 & 1 \\
195 & 1 \\
97 & 1 \\
48 & 0 \\
24 & 0 \\
12 & 0 \\
6 & 0 \\
3 & 1 \\
1 & 1 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3133 & 5 \\
391 & 7 \\
48 & 0 \\
6 & 6 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3133 & 13 \\
195 & 3 \\
12 & 12 \\
0 &
\end{array}
$$

- On obtient ainsi pour 3133

$$
\begin{aligned}
3133 &= 110000111101_2 \\
&= 6\ \ 0\ \ 7\ \ 5_8 \\
&= C\ \ 3\ \ D_{16}
\end{aligned}
$$

- alors que pour 294 on a

$$
\begin{aligned}
294 &= 100100110_2 \\
&= 1\ 2\ 6_{16}
\end{aligned}
$$

2.4 Donner la valeur décimale du nombre 11010, dans le cas d'un codage en base 2, 8 ou 16

- $11010_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 = 16 + 8 + 2 = 26_{10}$.
- $11010_8 = 1 \times 8^4 + 1 \times 8^3 + 1 \times 8^1 = 4096 + 512 + 8 = 4616_{10}$.
- $11010_{16} = 1 \times 16^4 + 1 \times 16^3 + 1 \times 16^1 = 65536 + 4096 + 16 = 69648_{10}$.

2.5 Conversion rapide hexadécimal vers binaire / octal et binaire vers octal / hexadécimal

- $FD5A87_{16}$ en bases 2 et 8

$$
\begin{array}{cccccc|l}
F & D & 5 & A & 8 & 7 & 16 \\
1111 & 1101 & 0101 & 1010 & 1000 & 0111 & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
111 & 111 & 010 & 101 & 101 & 010 & 000 & 111 & 2 \\
7 & 7 & 2 & 5 & 5 & 2 & 0 & 7 & 8
\end{array}
$$

- 10011010101_2 en bases 8 et 16

$$
\begin{array}{ccc|l}
4 & D & 5 & 16 \\
100 & 1101 & 0101 & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
10 & 011 & 010 & 101 & 2 \\
2 & 3 & 2 & 5 & 8
\end{array}
$$