Introduction à l'architecture des ordinateurs - R1.03

Codage interne des informations

Cours 2

Michel Salomon

IUT Nord Franche-Comté
Département d'informatique

Introduction

Un ordinateur traite des informations de différents types

- Instructions → `mov AH,09h` ⇔ `1011010000001001` ⇔ `B409h` ; etc.
- Nombres → -23 ; 3,1415 ; etc.
- Images → formats `PNG`, `PNM`, `JPG`, `GIF`, etc.
- etc.

Toute information est représentée sous **forme binaire**

- Suite de chiffres binaires → 2 valeurs possibles : **0** ou **1**
- Un chiffre binaire ou ***bi**nary digi**t*** → information élémentaire

Codage / format d'une information

Définit la correspondance entre représentations externe ↔ interne

- Convention / règle à suivre pour représenter une information
- Exemple : représentation de la quantité dix → `dix`, `10`, `X`, etc.

Introduction

En interne, un ordinateur traite deux types d'informations

1. les instructions (`mov AH,09h` $\rightarrow$ 8086 - 16 bits) ;
   - Représentent les opérations effectuées par un ordinateur ;
   - elles sont composées de deux champs :

     1 - le code de l'opération ($B4_{16} = 10110100_2$) ;

     `mov AH,`*val*

     2 - les opérandes de l'opération ($09_{16} = 00001001_2$)

     `mov AH,09h` $=$ `B409h`

   - elles constituent le langage machine ;
   - le langage le plus proche du langage machine est le langage d'assemblage ou Assembleur
2. les données élémentaires

Introduction

En interne, un ordinateur traite deux types d'informations

1. les instructions ;
2. les données élémentaires
   - Ce sont les opérandes et les résultats d'opérations ;
   - elles sont de deux types :

     1 - numériques ;
     - nombres entiers relatifs : -23 ; -1 ; 0 ; 1 ; 12 ; 234 ; etc.
     - nombres fractionnaires : -0,125 ; 3,1415 ; etc.
     - nombres en notation scientifique : $3,1 \times 10^5$; etc.

     2 - non numériques
     - caractères alphanumériques : A, B, . . . , Z, a, b, . . . , z, 0, 1, . . . , 9
     - caractères spéciaux : ?, #, $, etc.

Langage machine - Illustration avec le 8086

Assembleur 16 bits dans MS-DOS - `bonjour.asm`

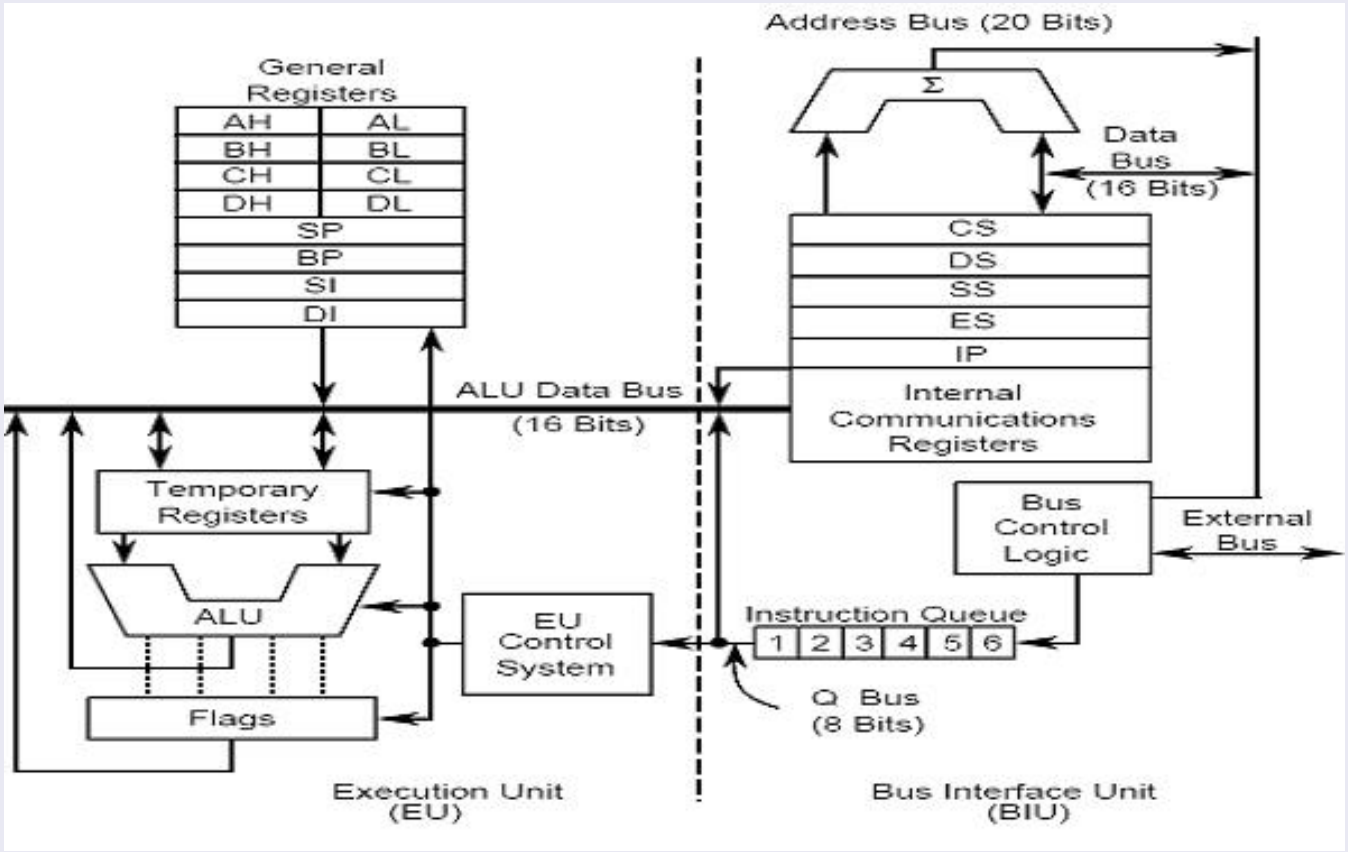
```
bits 16 ; indique qu'on produit du code 16 bits
org 0x100 ; directive de localisation mém. (COM)
section .data
     MessageBonjour: db 10,'Bonjour, monde...',10,'$'
section .text
     mov DX,MessageBonjour
     mov AH,09h
     int 21h
     mov AH,4Ch
     int 21h
```

Caractéristiques du 8086

- Bus d'adresses de 20 bits, mais registres d'adresses de 16 bits
- Registres de travail de 16 bits (`AX`=`AH` `AL`, `BX`, `CX` et `DX`)

Langage machine - Illustration avec le 8086

Structure globale du 8086 - **B**us **I**nterface **U**nit et **E**xecution **U**nit



Langage machine - Illustration avec le 8086

Assembleur 16 bits dans MS-DOS - `bonjour.asm`

```
bits 16 ; indique qu'on produit du code 16 bits
org 0x100 ; directive de localisation mém. (COM)
section .data
      MessageBonjour: db 10,'Bonjour, monde...',10,'$'
section .text
      mov DX,MessageBonjour
      mov AH,09h
      int 21h
      mov AH,4Ch
      int 21h
```

Dump mémoire du programme

```
00000000  BA0C01                    mov dx,0x10c
00000003  B409                      mov ah,0x9
00000005  CD21                      int 0x21
00000007  B44C                      mov ah,0x4c
00000009  CD21                      int 0x21
```

Langage machine - Illustration avec archi. x86 / IA-32

Assembleur 32 bits dans linux - `bonjour.asm`

```
bits 32
section .data
      MessageBonjour: db 10,'Bonjour, monde...',10
      MessageBonjourLong: equ $-MessageBonjour
section .text
global _start
_start: ; Affichage de la chaine de caracteres
      mov EAX,4
      mov EBX,1
      mov ECX,MessageBonjour
      mov EDX,MessageBonjourLong
      int 80h
      ; Terminaison du programme
      mov EAX,1
      mov EBX,0
      int 80h
```

Processus d'assemblage (dans un terminal)

- Compilation → `nasm -f elf bonjour.asm`
- Édition des liens → `ld -s bonjour.o -o bonjour` (??)

Format de données - Illustration avec des images

Un format est une convention (normalisée) de représentation ou stockage d'un type de données tel que texte, image, son, etc.

Codage des images matricielles

- Une image est un ensemble de points lumineux $\rightarrow$ pixel
- Une image est un tableau 2D (matrice) $\rightarrow$ contient les pixels
- Profondeur de codage / couleur $\rightarrow$ nombre de bits par pixel
  - 1 bits $\rightarrow 2^1 = 2$ couleurs (noir et blanc)
  - 8 bits $\rightarrow 2^8 = 256$ couleurs (avec palette) ou niveaux de gris
  - 24 bits $\rightarrow 2^{24} = 16$ millions de couleurs (codage RVB)
- Représentation des couleurs sur écran $\rightarrow$ codage RVB
  - 1 pixel logique correspond à 3 pixels physiques à l'écran
  - chaque pixel d'un triplet physique émet une couleur primaire

Unités de mesure

Le bit (0 ou 1) est la plus petite unité de mesure

Toutes les autres unités sont des regroupements de bits

- un quartet est un groupement de 4 bits ;
- un octet (*Byte*) est un groupement de 8 bits ;
- un mot (*Word*) est un groupement d'octets (2 ou plus)
  - unité de base manipulée par un processeur (registres, etc.)

Unités de mesure basées sur l'octet

- Principalement utilisées pour parler du stockage de données
- Deux types d'unités : en puissances de 2 ; en puissances de 10
- Issues de recommandations officielles (IEC 60027-2 - 1998)
- Historiquement, utilisation des dénominations officielles des puissances de 10 pour les puissances de 2

Unités de mesure

Le bit (0 ou 1) est la plus petite unité de mesure

Unités de mesure basées sur l'octet

- Principalement utilisées pour parler du stockage de données

Puissances de 2			
1 Kibioctet	Kio ou KiB	1024 octets	2^{10}
1 Mébioctet	Mio ou MiB	1024 Kio	2^{20}
1 Gibioctet	Gio ou GiB	1024 Mio	2^{30}
1 Tébioctet	Tio ou TiB	1024 Gio	2^{40}

Puissances de 10			
1 Kilooctet	ko ou kB	1000 octets	10^3
1 Mégaoctet	Mo ou MB	1000 ko	10^6
1 Gigaoctet	Go ou GB	1000 Mo	10^9
1 Téraoctet	To ou TB	1000 Go	10^{12}

- 1 Kibioctet = 1 "Kilo binaire octet"

Unités de mesure

Usage encore confus des deux types d'unités

- Au niveau matériel
  - Octets comptés en puissances de 2
  - Souvent en utilisant les dénominations historiques (puissances de 10)
  - Exemple : barrette mémoire de 8 Go à la place de 8 Gio
- Au niveau logiciel
  - Octets pouvant être comptés dans l'une ou l'autre des unités
  - Usage fréquent des dénominations historiques pour les puissances de 2
  - Exemples (quelques commandes à lancer dans un terminal)
    - Puissances de 2 ; bonnes dénominations → `/sbin/ifconfig`
    - Puissances de 2 et 10 ; dénominations "historiques" → `df`
    - Puissances de 2 ; dénominations "historiques" → `cat /proc/meminfo`

Numération en base b

Principes

- Un système de numération écrit les nombres à partir
  - d'une liste finie de symboles appelés chiffres ;
  - de règles définissant comment combiner ces chiffres
- Dans un système de base $b > 1$, un nombre entier naturel N est représenté par la suite de $n + 1$ chiffres

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$$

tels que :

- $c_i \in \{0, 1, \dots, b-2, b-1\}$;
- $c_n \neq 0$

et vérifiant

$$N = c_n \cdot b^n + c_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0 = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot b^i$$

Numération en base b

Principes (suite)

$$N = c_n \cdot b^n + c_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0 = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot b^i$$

- À chaque position est associée un poids : la puissance de b
  - c_n est le chiffre de poids fort ;
  - c_0 est le chiffre de poids faible

Exemple - écriture de 2017 en base 10

- Utilisation de $b = 10$ chiffres $\rightarrow c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
- Nombre écrit comme une addition de puissances de $b = 10$

$$\begin{aligned} 2017_{10} &= 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\ &= 2000 + 0 + 10 + 7 \\ &= 2017 \end{aligned}$$

Numération en base b

Conversion d'une base b quelconque vers la base 10

- Nombre en base 3 $\rightarrow c_i \in ?$

$(201)_3 = 201_3 = ?$

- Nombre en base 11 $\rightarrow c_i \in ?$

$(6A)_{11} = 6A_{11} = ?$

Systèmes de numération usuels en informatique

- Système binaire, $b = 2$ et $c_i \in \{0, 1\}$;
- Système octal, $b = 8$ et $c_i \in \{0, \ldots, 7\}$;
- Système hexadécimal, $b = 16$ et $c_i \in \{0, \ldots, 9, A, B, \ldots, F\}$
- Intérêt des systèmes octal et hexadécimal
  - représentation aisée des nombres ayant beaucoup de bits ;
  - conversion avec le système binaire simple (puissances de 2)

Numération en base b

Conversion d'une base b quelconque vers la base 10

- Nombre en base 3 $\rightarrow$ $c_i \in \{0, 1, 2\}$

$$(201)_3 = 201_3 = (2)_{10} \times 3^2 + (0)_{10} \times 3^1 + (1)_{10} \times 3^0 = 2 \times 9 + 1 \times 1 = 19$$

- Nombre en base 11 $\rightarrow$ $c_i \in \{0, 1, \ldots, 8, 9, A\}$

$$(6A)_{11} = 6A_{11} = (6)_{10} \times 11^1 + (A)_{10} \times 11^0 = 6 \times 11 + 10 \times 1 = 76$$

Systèmes de numération usuels en informatique

- Système binaire, $b = 2$ et $c_i \in \{0, 1\}$;
- Système octal, $b = 8$ et $c_i \in \{0, \ldots, 7\}$;
- Système hexadécimal, $b = 16$ et $c_i \in \{0, \ldots, 9, A, B, \ldots, F\}$
- Intérêt des systèmes octal et hexadécimal
  - représentation aisée des nombres ayant beaucoup de bits ;
  - conversion avec le système binaire simple (puissances de 2)

Numération en base b

Correspondance entre les systèmes de numération usuels

Décimal	Binaire	Octal	Hexadécimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Changement de base

Passage indirect d'un système de numération à un autre

1. Conversion de la base de départ b_d vers la base 10
2. Conversion de la base 10 vers la base d'arrivée b_a

Exemple 1 - Conversion de $6BC_{16}$ en base 12

1. Conversion de la base 16 vers la base 10

$$\begin{aligned} 6BC_{16} &= (6)_{10} \times 16^2 + (B)_{10} \times 16^1 + (C)_{10} \times 16^0 \\ 6BC_{16} &= 6 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 12 \times 16^0 \\ 6BC_{16} &= 6 \times 256 + 11 \times 16 + 12 \times 1 = 1724_{10} \end{aligned}$$

2. Conversion de la base 10 vers la base 12

$$\begin{aligned} 1724/12 = 143 \text{ reste } 8 &\leftrightarrow 1724 = 143 \times 12 + 8 \\ 143/12 = 11 \text{ reste } 11 &\leftrightarrow 143 = 11 \times 12 + 11 \\ 11/12 = 0 \text{ reste } 11 &\leftrightarrow 11 = 0 \times 12 + 11 \end{aligned}$$

On obtient donc $6BC_{16} = 1724_{10} = BB8_{12}$

Changement de base

Exemple 2 - Conversion de 22_{10} en base 2

Quotients successifs ↓

22	0
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

↑ *Restes successifs*

22	2								
0	11	2							
	1	5	2						
		1	2	2					
			0	1	2				
				1	0				

Conversions usuelles en informatique

- binaire ; octal ; hexadécimal → décimal
  - Additionner, respectivement, des puissances de 2 ; 8 ; 16
- décimal → binaire ; octal ; hexadécimal
  1. Divisions entières successives, respectivement par 2 ; 8 ; 16, tant que le quotient est non nul ;
  2. Lecture des restes du dernier vers le premier

Changement de base

Conversions octal ou hexadécimal $\rightarrow$ binaire

- Chaque chiffre octal ou hexadécimal est éclaté en son équivalent binaire sur respectivement 3 ou 4 bits
- Exemples :
  - $22_8 = 010\ 010_2 = 10010_2$;
  - $8A_{16} = 1000\ 1010_2 = 10001010_2$

Conversion binaire $\rightarrow$ octal ou hexadécimal

- On remplace de droite à gauche chaque groupe de 3 ou 4 bits par son équivalent octal ou hexadécimal
- Si le nombre de bits du nombre binaire n'est pas un multiple de 3 ou 4, on complète à gauche avec des bits à 0
- Exemples :
  - $010101_2 = 010\ 101_2 = 25_8$;
  - $10101_2 = 0001\ 0101_2 = 15_{16}$

Représentation des adresses et données

Un système informatique travaille sur des longueurs fixes de bits

des **mots** (**Word**) - `assembleur x86 → 1 word = 16 bits = 2 octets`

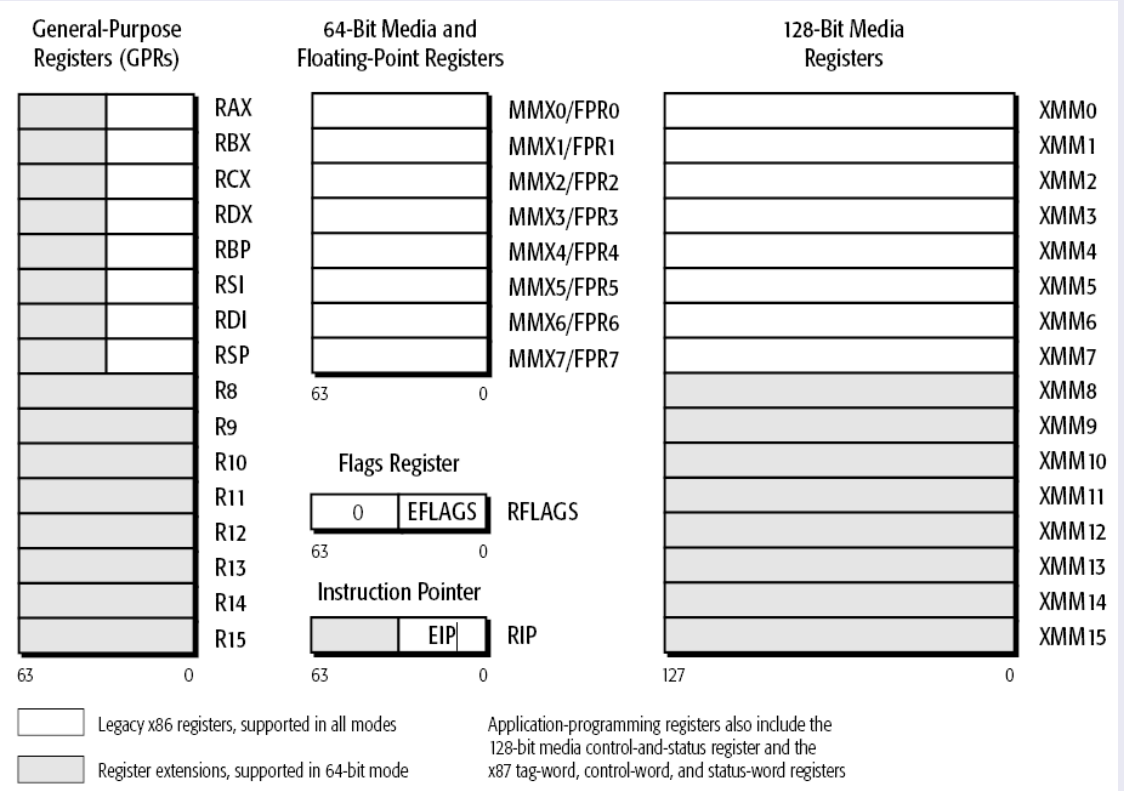
- Unité de base manipulée par un processeur (registres, etc.)
- Taille liée à la micro-architecture du processeur (registres)
  - processeur 16 bits → mots de 16 bits = 2 octets (`dw`)
  - processeur 32 bits → mots de 32 bits = 4 octets (`dd`)
  - processeur 64 bits → mots de 64 bits = 8 octets (`dq`)

Problématiques générales de représentation des nombres

- Problème de capacité
  → on ne peut représenter qu'un nombre fini de nombres
- Problème du signe
  → différencier les nombres négatifs des positifs ?
- Problème de perte de précision avec les nombres réels
  → gestion des arrondis ?

Représentation des adresses et données

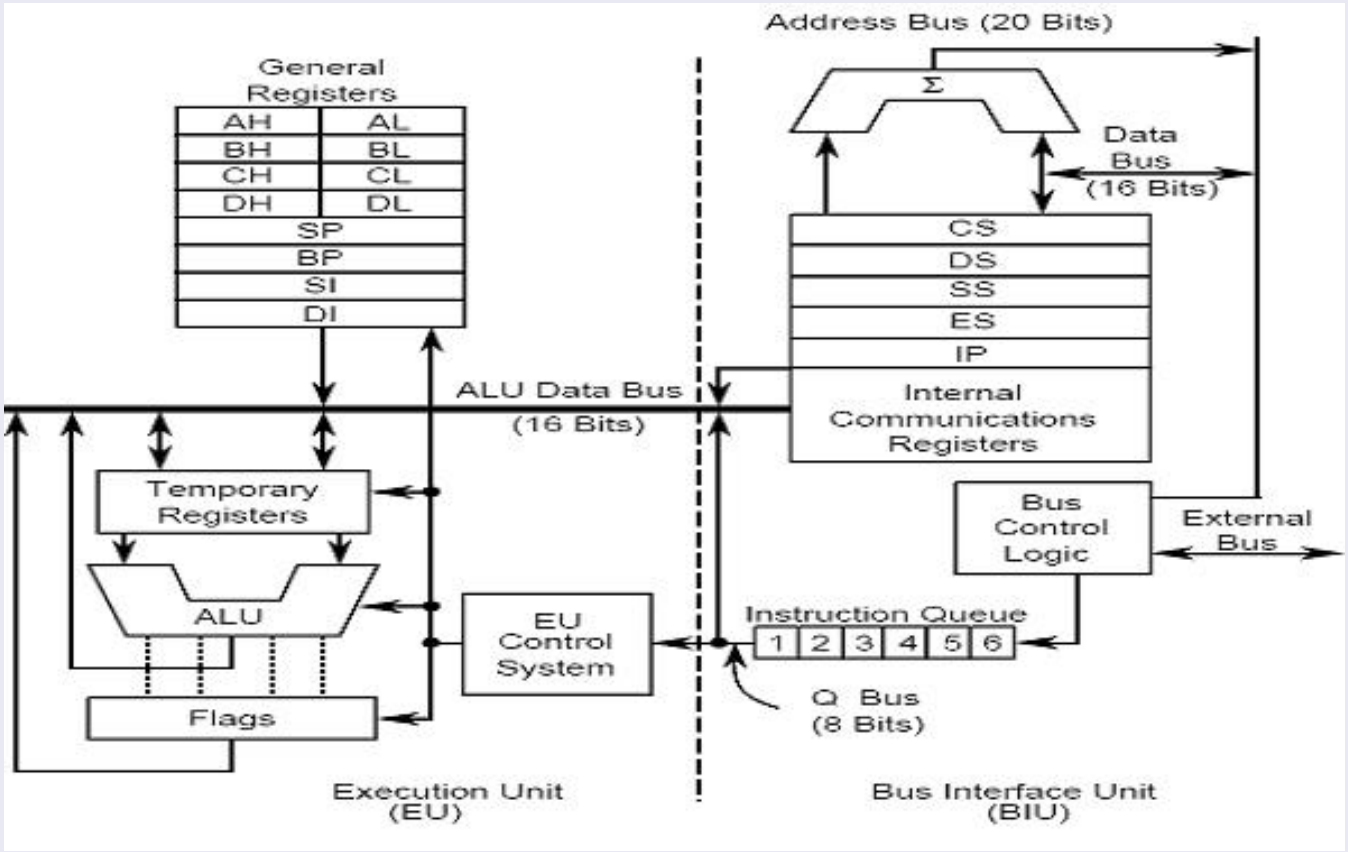
Illustration avec “des” registres de l’architecture x86-64



- Registres *de* données (nombres entiers) $\rightarrow$ `RAX`, `RBX`, `RCX`, `RDX`
- Registres *contenant* des offsets $\rightarrow$ `RBP`, `RSI`, `RDI`, `RSP`, `RIP`

Espace d’adressage virtuel sur au plus 64 bits

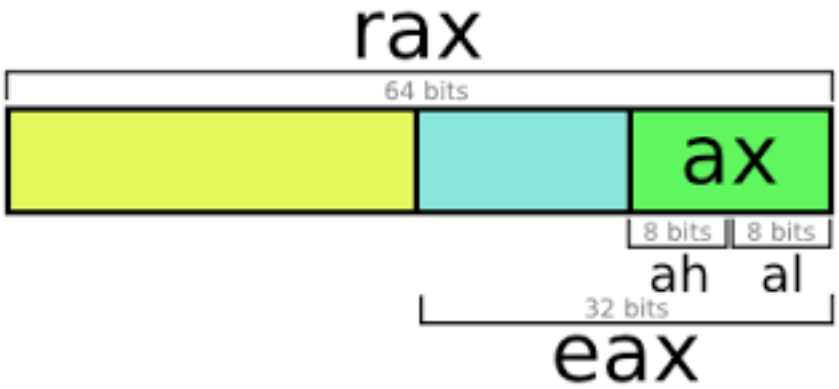
Structure globale du 8086 - **B**us **I**nterface **U**nit et **E**xecution **U**nit



Représentation des adresses et données

Accessibilité des registres généraux

- 64 bits → `RAX`
- 32 bits → `EAX`
- 16 bits → `AX`
- 8 bits → `AH` et `AL`



Adressage de la mémoire lié au mode dans lequel est le processeur

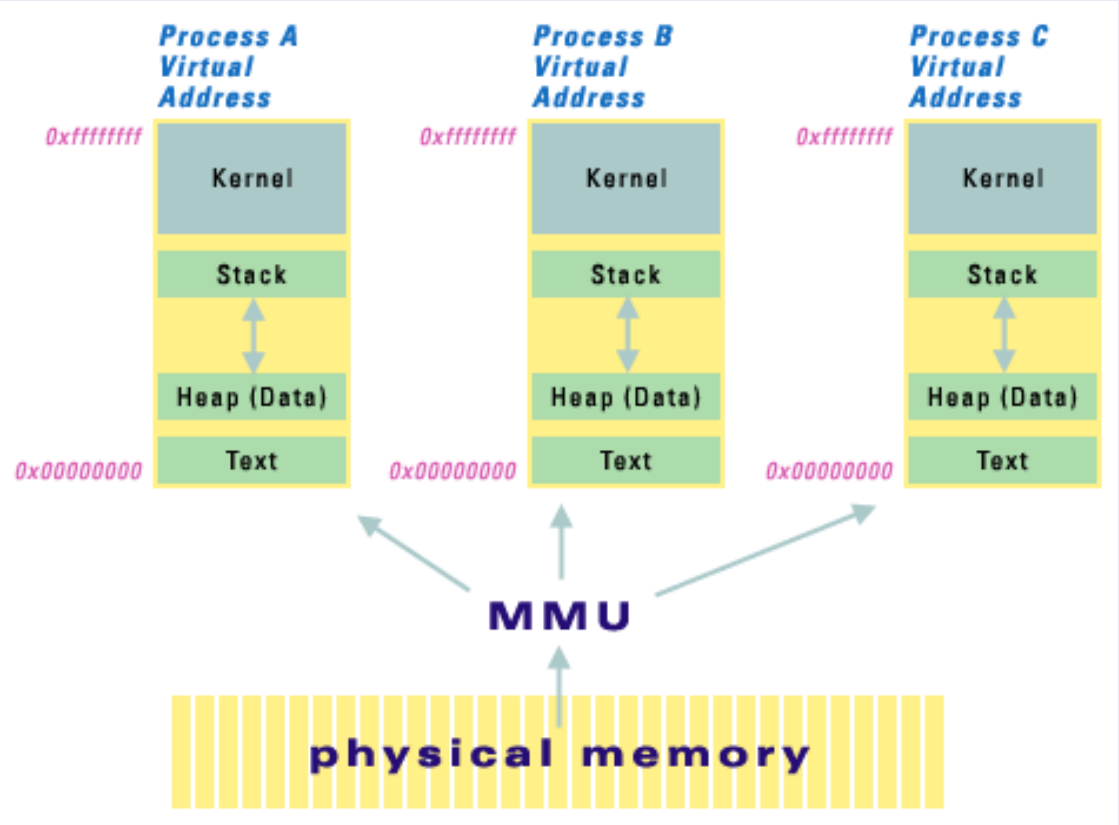
- *Legacy mode* (x86) → mode réel (au boot) et mode protégé
  - Systèmes d'exploitation / processeurs 16 bits ou 32 bits
  - Adresses virtuelles gérées par le SE d'au plus 32 bits en protégé
  - Mode réel (8086) → (au plus 1 Mio de mémoire)

@ physique (20 bits) = @ segment (16 bits) $\times 2^4$+ offset (déplacement sur 16 bits)

- *Long mode* (x86-64)
  - Systèmes d'exploitation / processeurs 64 bits
  - Adresses virtuelles gérées par le SE faisant au plus 64 bits

Représentation des adresses et données

Un processus est l'image mém. d'un programme en cours d'exéc.



- SE 32 bits → bloc / segment de mém. virtuelle de 4 Gio
- Adresse virtuelle "mappée" en physique par le noyau → **MMU**

Taille de l'espace d'adressage virtuel / physique "réel" fixé par le processeur

Représentation des adresses et données

Illustration avec les types de données de base en Java

- `char` $\rightarrow$ 1 octet $\Rightarrow$ code UNICODE (cf. fin du cours)
- `byte` $\rightarrow$ 1 octet $\Rightarrow$ entiers relatifs $\in \{-2^7, \ldots, 2^7 - 1\}$
- `short` $\rightarrow$ 2 octets $\Rightarrow$ entiers relatifs $\in \{-2^{15}, \ldots, 2^{15} - 1\}$
- `int` $\rightarrow$ 4 octets $\Rightarrow$ entiers relatifs $\in \{-2^{31}, \ldots, 2^{31} - 1\}$
- `long` $\rightarrow$ 8 octets $\Rightarrow$ entiers relatifs $\in \{-2^{63}, \ldots, 2^{63} - 1\}$
- `float` $\rightarrow$ 4 octets $\Rightarrow$ des réels entre $-3,4 \times 10^{38}$ et $3,4 \times 10^{38}$
- `double` $\rightarrow$ 8 octets $\Rightarrow$ des réels entre $-1,7 \times 10^{308}$ et $1,7 \times 10^{308}$

Illustration avec les types de données de base en C / C++

- `signed char` $\rightarrow$ 1 octet $\Rightarrow$ entiers relatifs $\in \{-2^7, \ldots, 2^7 - 1\}$
- `unsigned char` $\rightarrow$ 1 octet $\Rightarrow$ entiers nat. $\in \{0, \ldots, 2^8 - 1\}$
- `short int` $\rightarrow$ 2 octets $\Rightarrow$ entiers relatifs $\in \{-2^{15}, \ldots, 2^{15} - 1\}$
- etc.

Représentation des adresses et données

Endianess ou boutisme

Un ordre dans lequel les octets d'un nombre peuvent être :

- stockés en mémoire ;
- transmis à travers un réseau

Little endian *vs.* big endian - Stockage des octets

- Little endian → le moins significatif stocké en premier (`LSB`)
- Big endian → le plus significatif stocké en premier (`MSB`)

Exemple avec le nombre `0x12345678` (32 bits) en mémoire

Little endian

`0000:`	78
`0001:`	56
`0002:`	34
`0003:`	12

Big endian

`0000:`	12
`0001:`	34
`0002:`	56
`0003:`	78

Représentation des données numériques - **entiers**

Problématiques générales de représentation des entiers

- Problème de capacité
  - Codage sur un nombre fixe n de bits $\rightarrow 2^n$ nombres différents
  - Représentation dite en champ fixe
- Problème de représentation des nombres négatifs
  - Exemple : 1 bit pour coder le signe $\rightarrow$ existence de 2 zéros

Représentation des entiers naturels en binaire naturel (ou pur)

- Nombres représentés en base 2, bits rangés dans l'ordre de leur poids, en complétant éventuellement à gauche avec des 0
- n bits permettent de représenter les nombres entre 0 et $2^n - 1$
- Ils peuvent être stockés dans des registres de n bits
  - Taille des registres d'un processeur fixée par le constructeur
  - Un ordinateur ne peut représenter qu'un nombre fini de valeurs
- Un calcul peut donner un résultat supérieur au nombre maximum représentable $\rightarrow$ débordement (*overflow*)

Représentation en binaire naturel (ou pur) (suite) - Exemple

- 8 bits permettent de représenter l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 255\}$;
- en code binaire naturel, 108 a pour représentation sur 8 bits

	MSB							*LSB*
	0	1	1	0	1	1	0	0
position	*7*							*0*
poids	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Most Significant Bit => bit le plus significatif

Least Significant Bit => bit le moins significatif

On a $108_{10} = 01101100_2$ sur 8 bits

Opérations arithmétiques binaires

- Principe identique à l'arithmétique décimale
- Addition et soustraction
  - Chiffre par chiffre ;
  - des poids faibles vers les poids forts ;
  - en propageant la retenue
- Multiplication et division correspondent respectivement à une série d'additions, soustractions

Tables d'addition et de soustraction

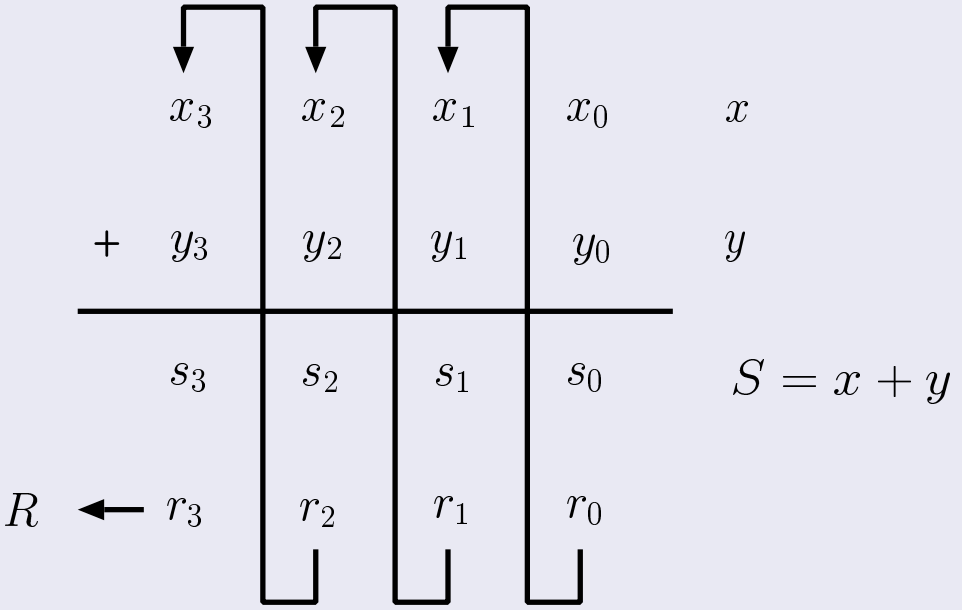
Opérandes		Addition		Soustraction	
x	y	retenue	x+y	retenue	x−y
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

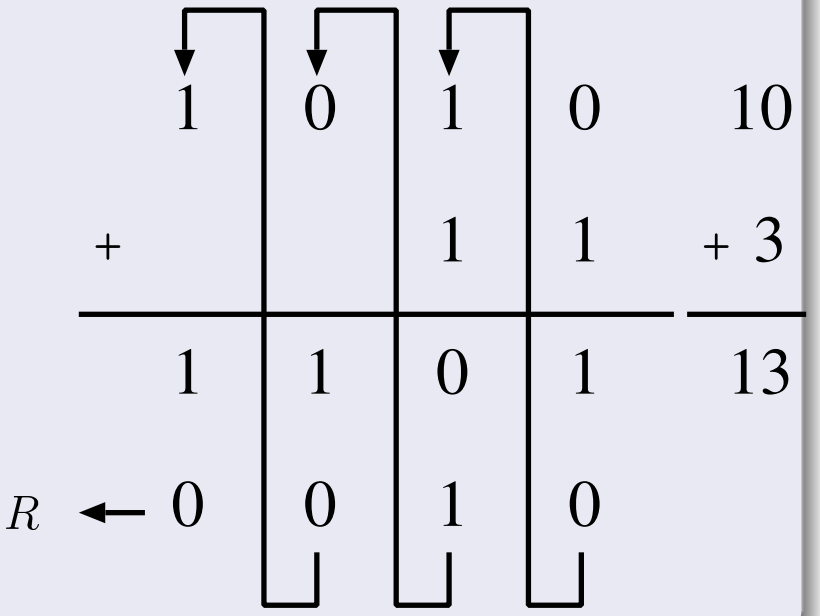
Opérations arithmétiques binaires

Exemple d'addition de nombres codés sur 4 bits

- Débordement (*overflow*) si le résultat de l'addition de deux nombres nécessite plus de bits ;
- c'est-à-dire si la dernière retenue est égale à 1

Addition de 10 et 3



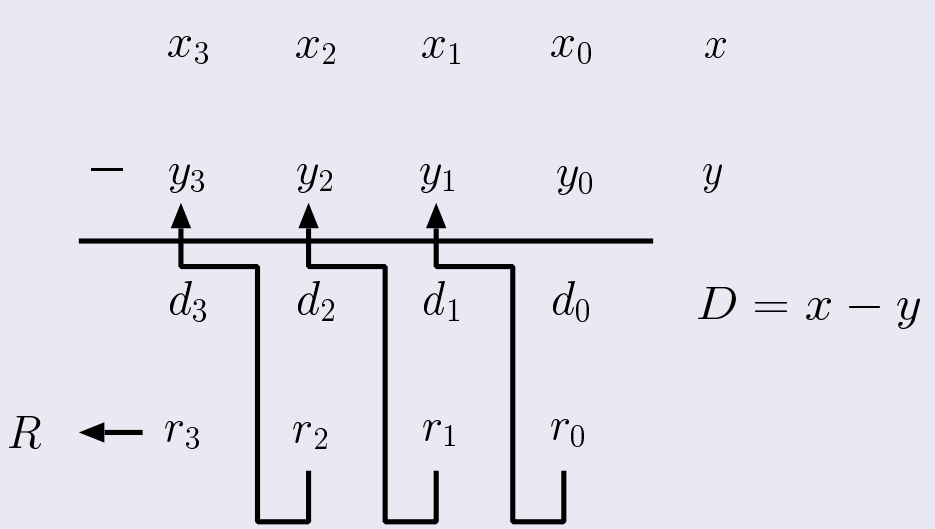


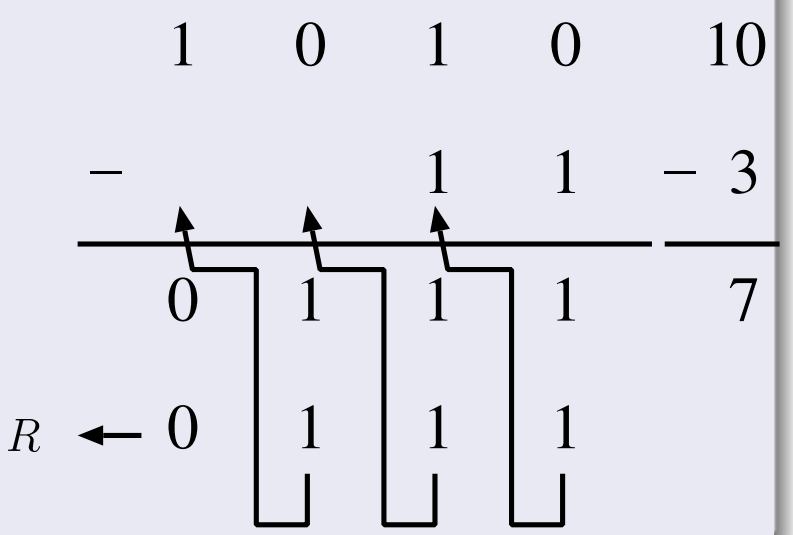
Opérations arithmétiques binaires

Exemple de soustraction entre nombres codés sur 4 bits

- Débordement (*overflow*) si le résultat de la soustraction entre deux nombres nécessite plus de bits ;
- c'est-à-dire si la dernière retenue est égale à 1

Soustraction de 3 à 10





Représentation des données numériques - **entiers relatifs**

On distingue différentes représentations des **entiers signés**

- Représentation avec le signe et la valeur absolue
- Représentations complémentées
- Représentations biaisées (ou excédentaires)

Représentation avec le signe et la valeur absolue

- Bit le plus à gauche utilisé pour le signe

$$0 \rightarrow + \text{ et } 1 \rightarrow -$$

- n bits permettent de coder les entiers N tels que

$$-(2^{n-1}-1) \leq N \leq +(2^{n-1}-1)$$

- Exemple
  - 4 bits permettent de représenter $\{-7, \ldots, 0, \ldots, 7\}$;
  - on a notamment $+5 = 0101$ et $-5 = 1101$
- Remarques (inconvénients)
  1. Existence de deux zéros ($000\ldots0$ et $100\ldots0$)
  2. Tables d'addition et de multiplication compliquées

Représentation en complément à 1

- Conservation du bit de signe
- Représentation d'un entier négatif $-X$ obtenue en inversant chaque bit de la représentation de l'entier positif $+X$
  - 0 est remplacé par 1 ;
  - 1 est remplacé par 0
- n bits permettent de coder les entiers N tels que

$$-(2^{n-1}-1) \leq N \leq +(2^{n-1}-1)$$

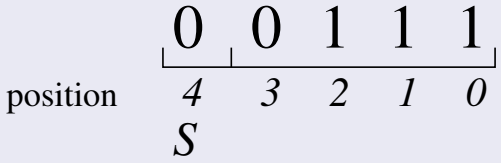
- Exemple
  - 4 bits permettent de représenter $\{-7,\ldots,0,\ldots,7\}$;
  - on a notamment $+5 = 0101$ et $-5 = 1010$
- Remarques
  - Existence de 2 zéros ($000\ldots0$ et $111\ldots1$)
  - On parle également de complément logique

Exemple de représentation en complément à 1

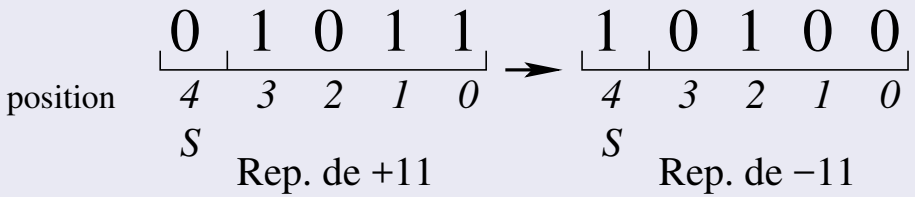
- Codage sur 5 bits
  - Bit de **S**igne → bit de poids fort
  - Nombres représentables (31 nombres)

$$\begin{aligned} -(2^4-1) \leq \quad & N \quad \leq +(2^4-1) \\ -15 \leq \quad & N \quad \leq +15 \end{aligned}$$

- Représentation de $+7 \rightarrow 7_{10} = 0111_2$ sur 4 bits



- Représentation de $-11 \rightarrow 11_{10} = 1011_2$ sur 4 bits



- $\forall a \geq 0, a + (-a) = 11111_2 = 31 = 2^5 - 1$

Représentation en complément à 2

- Principaux objectifs
  - L'addition d'un nombre et de son opposé donne zéro
  - Suppression du double zéro
  - Quasiment autant de positifs que de négatifs
- Principe de calcul des nombres négatifs
  1. On calcule le complément à 1 du nombre ;
  2. on additionne 1 à la valeur du complément à 1
- n bits permettent de coder les entiers N tels que

$$-2^{n-1} \leq N \leq +(2^{n-1} - 1)$$

- Exemple
  - 4 bits permettent de représenter $\{-8, \ldots, 0, \ldots, 7\}$;
  - on a notamment $+5 = 0101$ et $-5 = 1011$
- Remarques
  - Opérations arithmétiques intéressantes (soustraire un nombre se ramène à l'addition de son complément à 2)
  - On parle également de complément arithmétique

Exemple de représentation en complément à 2

- Codage sur 5 bits
  - Bit de **S**igne → bit de poids fort
  - Nombres représentables (32 nombres)

$$\begin{aligned} -2^4 \leq \quad & N \quad \leq +(2^4 - 1) \\ -16 \leq \quad & N \quad \leq +15 \end{aligned}$$

- Représentation de $+7 \rightarrow 7_{10} = 0111_2$ sur 4 bits

position : 4 3 2 1 0 — S

$$\underbrace{0\ 0\ 1\ 1\ 1}$$

- Représentation de $-11 \rightarrow 11_{10} = 1011_2$ sur 4 bits

position : 4 3 2 1 0 — S

$$\underbrace{0\ 1\ 0\ 1\ 1} \longrightarrow 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \quad \text{Complement a 1}$$

Rep. de +11

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ + \qquad\quad 1 \\ \hline \underbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 1} \end{array} \quad \text{Complement a 2}$$

position : 4 3 2 1 0 — S

Rep. de −11

Représentation biaisée ou excédentaire (plus de bit de signe)

- Code les nombres de façon décalé en fixant le binaire de zéro $\rightarrow$ autant de nombres positifs (avec zéro) que de négatifs
- Principe de calcul
  1. Ajouter une valeur de biais (ou d'excès) ;
  2. utiliser le code binaire naturel du résultat
- Sur n bits, généralement le biais $= 2^{n-1} \rightarrow$ représente 0
- Un nombre négatif $-X$ est représentable si $-X \geq -\text{biais}$
- n bits permettent de coder les entiers N tels que

$$-2^{n-1} \leq N \leq +(2^{n-1} - 1)$$

- Exemple
  - 4 bits peuvent représenter $\{-8, \ldots, 0, \ldots, 7\}$; biais $= 2^3 = 8$;
  - on a notamment $-8 = 0000$ et $5 = 1101$ (binaire de 13)
- Remarque
  - On parle également de code excédent-*valeur de biais* ;
  - ou de représentation sur n bits en excédent à *valeur de biais*

Exemple de représentation biaisée ou excédentaire

- Codage sur 5 bits (code excédent-16)
  - **Pas de bit de signe** ; **biais** $= 2^4 = 16 \rightarrow$ fixe le binaire pour 0
  - Nombres représentables (32 nombres)

$$\begin{aligned} -2^4 \leq \quad & N \quad \leq +(2^4 - 1) \\ -16 \leq \quad & N \quad \leq +15 \end{aligned}$$

- Représentation de $+7 \rightarrow 7 + 16 = 23_{10} = 10111_2$ sur 5 bits

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}}_{\text{position}} \quad \begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

- Représentation de $0 \rightarrow = 0 + 16 = 16_{10} = 10000_2$ sur 5 bits
- Représentation de $-11 \rightarrow -11 + 16 = 5_{10} = 00101_2$ sur 5 bits

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}_{\text{position}} \quad \begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Représentation d'entiers signés sur 16 bits

Décimal	Bit de signe	Complément à 1	Complément à 2
+32767	011...111	011...111	011...111
+32766	011...110	011...110	011...110
...	...	...	...
+1	000...001	000...001	000...001
+0	000...000	000...000	000...000
-0	100...000	111...111	———
-1	100...001	111...110	111...111
...	...	...	...
-32766	111...110	100...001	100...010
-32767	111...111	100...000	100...001
-32768	———	———	100...000

Représentation des données numériques - **réels**

- Rationnels et réels sont des nombres comportant une virgule
- Représenter tous les rationnels et les réels est impossible
  - Tout nombre est codé sur un nombre fini de bits
- Prise en compte de la virgule
- On distingue différentes représentations des réels :
  - la représentation en virgule fixe ;
  - la représentation en virgule flottante - norme IEEE 754
    - simple précision sur 32 bits (`float` en C / C++) ;
    - double précision sur 64 bits (`double` en C / C++) ;
    - précision étendue sur 80 bits (`long double` en C / C++)

***I**nstitute of **E**lectrical and **E**lectronics **E**ngineers*
http://www.ieee.org

Représentation des données numériques - **réels**

Représentation en virgule fixe

- Similaire à celle des nombres entiers, avec une virgule virtuelle $\Rightarrow$ gestion de la virgule par le programmeur...
- Exemple - sur 8 bits
  - Un choix possible :
    - 4 bits pour la partie entière ;
    - 4 bits pour la partie décimale
  - ainsi 01011100 représente $0101,1100_2 = 101,11_2$
- Changement de base
  - binaire $\Rightarrow$ décimal (base $b \rightarrow$ remplacer 2 par b)
    - partie entière $\rightarrow$ addition de puissances de 2 positives ;
    - partie décimale $\rightarrow$ addition de puissances de 2 négatives

$$\begin{aligned} 101,11_2 &= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\ &= 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} \\ &= 4 + 1 + 0,5 + 0,25 = 5,75 \end{aligned}$$

Représentation en virgule fixe (suite)

- Changement de base (suite)
  - décimal $\Rightarrow$ binaire (base $b \rightarrow$ remplacer 2 par b)
    - partie entière $\rightarrow$ conversion d'un nombre entier en base 2
    - partie décimale

    ◦ Multiplications successives par 2 de nombres décimaux ;

    ◦ arrêt quand la partie décimale est nulle ou que le nombre de bits correspond à la taille du registre

    ◦ Le nombre binaire cherché s'obtient en lisant les parties entières de la première vers la dernière

On a ainsi $0,5625_{10} = 0,1001_2$ car

$$\begin{aligned} 0,5625 \times 2 &= 1,125 (= 1 + 0,125) \\ 0,125 \times 2 &= 0,25 (= 0 + 0,25) \\ 0,25 \times 2 &= 0,5 (= 0 + 0,5) \\ 0,5 \times 2 &= 1,0 (= 1 + 0) \end{aligned}$$

Représentation des données numériques - **réels**

Donner la valeur décimale représentée par $1011,10101_2$

$$1011,10101_2 \quad =?$$

Donner le binaire représentant $\frac{1}{7}$ sur 8 bits (7 bits pour la partie décimale)

$$\frac{1}{7} \quad =?$$

Représentation des données numériques - **réels**

Donner la valeur décimale représentée par $1011,10101_2$

$$
\begin{aligned}
1011,10101_2 &= 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} \\
&\quad +0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5} \\
&= 2^3 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} \\
&= 8 + 2 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \\
&= 11 + 0,5 + 0,125 + 0,03125 = \mathbf{11,65625}
\end{aligned}
$$

Donner le binaire représentant $\frac{1}{7}$ sur 8 bits (7 bits pour la partie décimale)

$$\frac{1}{7} \quad =?$$

Représentation des données numériques - **réels**

Donner le binaire représentant $\frac{1}{7}$ sur 8 bits (7 bits pour la partie décimale)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0,142857142857\cdots \rightarrow \text{partie entière} = 0 \\
0,142857 \times 2 &= 0,285714 \rightarrow 0 \\
0,285714 \times 2 &= 0,571428 \rightarrow 0 \\
0,571428 \times 2 &= 1,142856 \rightarrow 1 \\
0,142856 \times 2 &= 0,285712 \rightarrow 0 \\
0,285712 \times 2 &= 0,571424 \rightarrow 0 \\
0,571424 \times 2 &= 1,142848 \rightarrow 1 \\
0,142848 \times 2 &= 0,285696 \rightarrow 0 \\
\ldots &= \rightarrow \text{partie décimale} = 0010010 \text{ (sur 7 bits)} \\
\text{d'où } \frac{1}{7} &\approx 0,0010010_2 \approx 0,140625
\end{aligned}
$$

Représentation des données numériques - **réels**

Représentation en virgule flottante - **Notation scientifique**

- Un nombre réel N est représenté sous la forme

$$N = + \text{ ou } - M \times B^E$$

  - M = mantisse en base B ;
  - B = base (2, 8, 10, 16, etc.) ;
  - E = exposant

  tels que :

  - la mantisse M, aussi appelée significande, est un nombre comportant une virgule ;
  - l'exposant E est un entier relatif

- Exemples
  - $123000 = 1,23 \times 10^5$;
  - $-0,002 = -0,02 \times 10^{-1}$;
  - $1011_2 = 1,011 \times 2^3$

Représentation des données numériques - **réels**

Représentation en virgule flottante - **Notation scientifique**

- **Problème → de nombreuses représentations possibles**
  - La représentation dépend de la position de la virgule
  - Exemple

$$\begin{aligned} 3,141592 &= 0,3141592 \times 10^{1} \\ &= 3,141592 \times 10^{0} \\ &= 31,41592 \times 10^{-1} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

- **Solution → une représentation normalisée**
  - Normalisation en imposant la forme de la mantisse
    - Tronquer ou arrondir la mantisse peut être nécessaire, en raison de la taille fixe pour la stocker
  - Exemple
    - 1 seul chiffre significatif (non zéro) avant la virgule

$$3,141592 \times 10^{0}$$

Représentation en virgule flottante - **Notation scientifique**

- Nombre fini de valeurs $\rightarrow$ utilisation de valeurs approchées
- Densité des nombres variable $\rightarrow$ plus on s'éloigne de 0, plus la distance entre les nombres représentés s'accroît
  - Exemple
    - notation scientifique sur 4 chiffres en base 10 ;
    - mantisse à 2 chiffres, normalisée sous la forme $0,nc$ $(n \neq 0)$;
    - exposant sur 2 chiffres

$$\overbrace{(2 \times 9 \times 10)}^{\text{Nb de mantisses}} \times \overbrace{((2 \times 10 \times 10) - 1)}^{\text{Nb d'exposants}} = \underset{\text{35820 nombres possibles}}{}$$

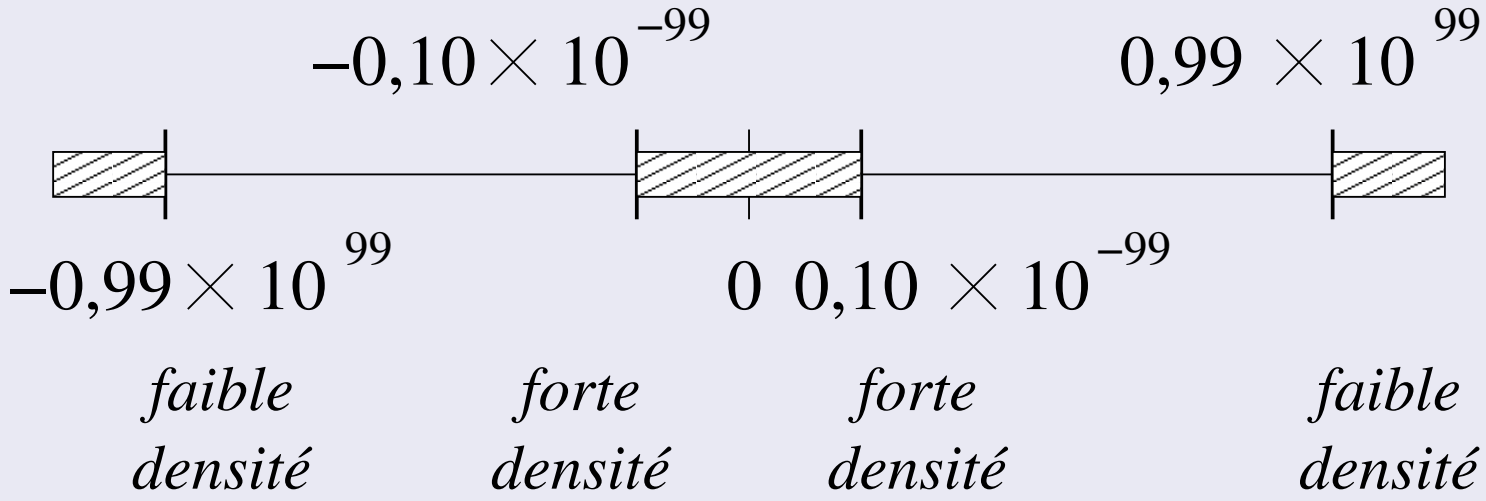
Représentation des données numériques - **réels**

Représentation en virgule flottante - **Notation scientifique**

- Nombre fini de valeurs $\rightarrow$ utilisation de valeurs approchées
- Densité des nombres variable $\rightarrow$ plus on s'éloigne de 0, plus la distance entre les nombres représentés s'accroît
  - Exemple

    $\rightarrow$ entre $0,11 \times 10^{0}$ et $0,12 \times 10^{0}$ écart de $0,01$

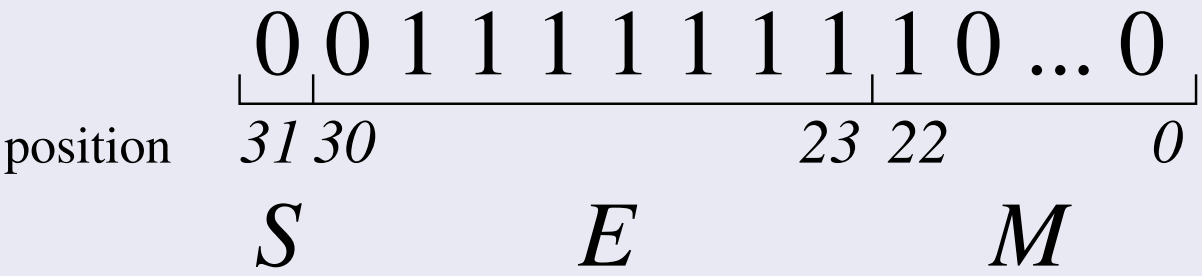
    $\rightarrow$ entre $0,11 \times 10^{10}$ et $0,12 \times 10^{10}$ écart de $10^{8} = 100000000$



Représentation des données numériques - **réels**

Représentation en virgule flottante - **Norme IEEE 754**

- Format des nombres flottants simple précision sur 32 bits
  - 1 bit de signe ;
  - 8 bits d'exposant ;
  - 23 bits de mantisse



- Format des nombres flottants double précision sur 64 bits
  - 1 bit de signe ;
  - 11 bits d'exposant ;
  - 52 bits pour la mantisse

Représentation des données numériques - **réels**

Représentation en virgule flottante - **Simple précision (32 bits)**

- Le bit le plus à gauche est utilisé pour le **Signe** :
  - $0 \rightarrow +$;
  - $1 \rightarrow$ -
- L'**Exposant** est représenté sur 8 bits en excédent à 127

$$E_{\text{réel}} \in \{-126, -125, \ldots, 126, 127\}$$

  - car il y a deux valeurs réservées :
    - $-127 \rightarrow$ tous les bits à 0 ;
    - $128 \rightarrow$ tous les bits à 1
- La **Mantisse** M est normalisée sous la forme suivante :

$$1, cc \ldots$$

  - où $c \in \{0, 1\}$;
  - le 1 avant la virgule n'est pas représenté parmi les 23 bits de la mantisse $\rightarrow$ bit caché (*hidden bit*)

Représentation des données numériques - **réels**

Représentation en virgule flottante - **Simple précision (32 bits)**

- Exemple 1 - Codage de $1,5$

  $1,5_{10} = 1,1_2 = 1,1_2 \times 2^0$ (notation scientifique normalisée en base 2)

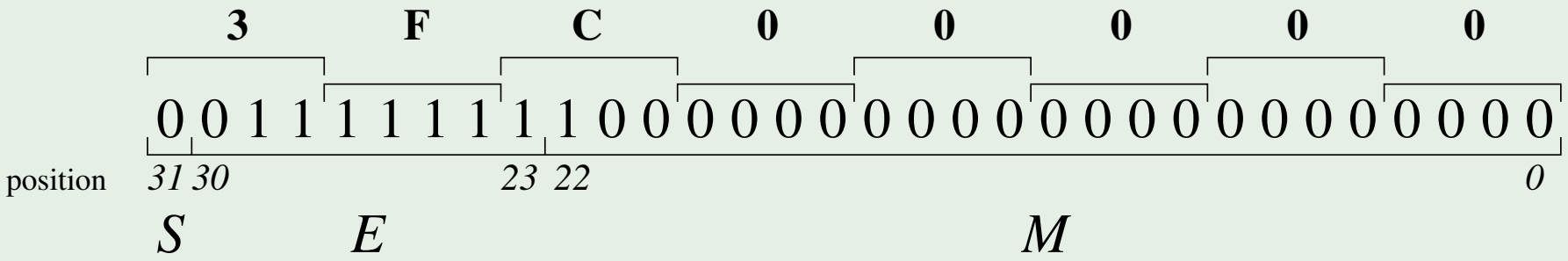
  - Signe positif $\rightarrow S = 0_2$
  - Exposant réel égal à 0 $\rightarrow$ exposant biaisé valant

    $$E_{\text{biaisé}} = E_{\text{réel}} + 127 = 0 + 127 = 127 = 01111111_2$$

  - Mantisse égale à $1,1_2 \rightarrow M = 10\ldots0_2$

    On a ainsi $1,5_{10}$ qui est codé par $3FC00000_{16}$

Codage IEEE 754 simple précision de $1,5_{10}$



Représentation en virgule flottante - **Simple précision (32 bits)**

- Exemple 2 - Valeur décimale du réel $BF270000_{16}$
  - $S = 1_2 \rightarrow$ signe négatif
  - Exposant biaisé égal à 126 $\rightarrow$ exposant réel valant

    $$E_{\text{réel}} = E_{\text{biaisé}} - 127 = (01111110_2 = 126) - 127 = -1$$
  - $M = 01001110\ldots0_2 \rightarrow$ mantisse égale à $1,0100111_2$

$$-1,0100111_2 \times 2^{-1} = -0,10100111_2 = -0,65234375_{10}$$

Codage IEEE 754 simple précision d'un réel