TD4 - Représentation des entiers relatifs et des réels

1 Représentation des entiers relatifs en complément à 2

① Donner la représentation en complément à 2 sur 8 bits, quand cela est possible, des entiers relatifs qui suivent : -73, -7, 0, 88 et 139.

② En considérant la même représentation, donner la valeur codée par les séquences binaires 11011001 et 10011110.

Correction

① Sur k bits on peut représenter les entiers N tels que $-\left(2^{k-1}\right) \leq N \leq +\left(2^{k-1}-1\right)$.
Par conséquent, sur 8 bits, on a $-128 \leq N \leq +127$. Mis à part 139, les autres entiers relatifs sont donc représentables.

- Zéro et les entiers positifs ont la même représentation que les entiers naturels donc $0 = 00000000$ et $88 = 01011000$.
- Pour les entiers négatifs on utilise le binaire de leur valeur absolue, on calcule le complément à 1, puis on ajoute 1. On obtient ainsi :
  - $73_{10} = 01001001_2$, puis 10110110 et $10110111 = -73$;
  - $7_{10} = 00000111_2$, puis 11111000 et $11111001 = -7$.

② Déterminer l'entier relatif représenté par une séquence binaire

(a) Valeur codée par 11011001

- Bit de signe à 1 $\rightarrow$ nombre négatif ;
- pour obtenir la valeur absolue du nombre codé, il suffit de calculer le complément à 2 du nombre.
  1. Inversion des bits (complément à 1)
     $11011001 \rightarrow 00100110$
  2. Ajout de 1

$$
\begin{array}{r}
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
+ \qquad\qquad\qquad\quad 1 \\
\hline
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
100111_2 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 32 + 4 + 2 + 1 \\
&= 39
\end{aligned}
$$

Donc, c'est -39 qui est codé par 11011001.

(b) Valeur codée par 10011110

— Bit de signe à 1 $\rightarrow$ nombre négatif ;

— pour obtenir la valeur absolue du nombre codé, il suffit de calculer le complément à 2 du nombre.

1. Inversion des bits (complément à 1)
   10011110 $\rightarrow$ 01100001
2. Ajout de 1

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ +\qquad\qquad\qquad\quad 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

Or

$$\begin{aligned} 1100010_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^1 \\ &= 64 + 32 + 2 \\ &= 98 \end{aligned}$$

Donc, c'est -98 qui est codé par 10011110.

2 Représentation des réels

2.1 Représentation en virgule fixe

Correction

① Conversion en base 10

— $1101,1011_2$

$$\begin{aligned} 1101,1011_2 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\ &= 2^3 + 2^2 + 2^0 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \\ &= 8 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &= 13,6875 \end{aligned} \tag{1}$$

On obtient donc $1101,1011_2 = 13,6875_{10}$.

— $3,472_8$

$$\begin{aligned} 3,472_8 &= 3 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} + 7 \times 8^{-2} + 2 \times 8^{-3} \\ &= 3 \times 1 + 4 \times \frac{1}{8} + 7 \times \frac{1}{64} + 2 \times \frac{1}{512} \\ &= 3 + \frac{1}{2} + \frac{7}{64} + \frac{1}{256} \\ &= 3,61328125_{10} \end{aligned}$$

On obtient donc $3,472_8 = 3,61328125_{10}$.

Autre approche possible : utiliser la notation scientifique

- $1101,1011_2 = 11011011_2 \times 2^{-4} = 219 \times \frac{1}{16} = 13,6875_{10}$;
- $3,472_8 = 3472_8 \times 8^{-3} = 1850 \times \frac{1}{512} = 3,61328125_{10}$.

② Conversion en base 2

- $23,6875_{10}$
  - Partie entière : $23_{10} = 10111_2$.
  - Partie fractionnaire :

$$\begin{aligned} 0,6875 \times 2 &= 1,375 \rightarrow 1 \\ 0,375 \times 2 &= 0,75 \rightarrow 0 \\ 0,75 \times 2 &= 1,5 \rightarrow 1 \\ 0,5 \times 2 &= 1,0 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

  d'où $0,6875_{10} = 0,10110000_2$ sur 8 bits.

  On obtient donc $23,6875_{10} = 00010111,10110000_2$.
- $45,2_6$ Il faut tout d'abord convertir le nombre en base 10 :

$$45,2_6 = 4 \times 6^1 + 5 \times 6^0 + 2 \times 6^{-1} = 29,3333..._{10}$$

  - Partie entière : $45_6 = 29_{10} = 11101_2$.
  - Partie fractionnaire :

$$\begin{aligned} 0,3333 \times 2 &= 0,6666 \rightarrow 0 \\ 0,6666 \times 2 &= 1,3332 \rightarrow 1 \\ 0,3332 \times 2 &= 0,6664 \rightarrow 0 \\ 0,6664 \times 2 &= 1,3328 \rightarrow 1 \\ 0,3328 \times 2 &= 0,6656 \rightarrow 0 \\ \text{etc.} &= \rightarrow 1 \\ &= \rightarrow 0 \\ &= \rightarrow 1 \end{aligned}$$

  d'où $0,3333_{10} = 0,01010101_2$ sur 8 bits.

  On obtient donc $45,2_6 = 00011101,01010101$, soit une approximation.

③ Conversion rapide du nombre hexadécimal $364,B33$ en binaire et en octal Pour passer de l'hexa. à l'octal il faut nécessairement transiter par le binaire.

- Binaire $\rightarrow$ il suffit de remplacer chaque symbole de l'hexa. par la séquence de 4 bits correspondante en commençant à chaque fois à partir de la virgule. Soit :
  - $364_{16} = 0011\ 0110\ 0100 = 1101100100_2$
  - $B33_{16} = 1011\ 0011\ 0011 = 101100110011_2$

  D'où $364,B33_{16} = 1101100100,101100110011_2$
- Octal $\rightarrow$ pour obtenir l'octal depuis le binaire on fait des blocs de 3 bits en commençant à chaque fois à partir de la virgule. Soit :
  - $1101100100_2 = 001\ 101\ 100\ 100 = 1544_8$
  - $101100110011_2 = 101\ 100\ 110\ 011 = 5463_8$

  D'où $364,B33_{16} = 1544,5463_8$

2.2 Représentation en virgule flottante

Correction

① Représention IEEE 754 simple précision d'un réel.

(a) Conversion en base 2

— Partie entière : $187_{10} = 10111011_2$.

— Partie fractionnaire :

$$\begin{aligned} 0,4375 \times 2 &= 0,875 \rightarrow 0 \\ 0,875 \times 2 &= 1,75 \rightarrow 1 \\ 0,75 \times 2 &= 1,5 \rightarrow 1 \\ 0,5 \times 2 &= 1,0 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

d'où $0,4375_{10} = 0,0111_2$.

On obtient donc $187,4375_{10} = 10111011,0111_2$.

(b) Norme IEEE 754

On réécrit le nombre avec la représentation en virgule flottante, en normalisant la mantisse :

$$187,4375_{10} = 1,01110110111_2 \times 2^7.$$

D'où :

— Signe = + $\rightarrow S = 0$.

— Exposant

$$E_{\text{réel}} = 7 \rightarrow E_{\text{biaisé}} = 7 + 127 = 134,$$

et $134_{10} = 10000110_2 = E$ sur 8 bits.

— Mantisse = $1,01110110111_2 \rightarrow M = 011101101110\ldots0$.

et donc on aboutit au code suivant :

4	3	3	B	7	0 0 0
0 1 0 0	0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	0 1 1 1	0... 0

S (0) — E (1 0 0 0 0 1 1 0) — M (0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0... 0)

Ainsi en IEEE 754 simple précision $433B7000_{16}$ code le réel $187,4375_{10}$.

② Valeur d'un réel représenté en IEEE 754 simple précision.

(a) Norme IEEE 754

On identifie le Signe, l'Exposant et la Mantisse.

C	1	6	5	0	0 0 0
1 1 0 0	0 0 0 1	0 1 1 0	0 1 0 1	0 0 0 0	0... 0

S (1) — E (1 0 0 0 0 0 1 0) — M (1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0... 0)

D'où :

— $S = 1 \rightarrow$ Signe = -.

— $E = 10000010_2 = 130_{10} = E_{\text{biaisé}}$

$$E_{\text{biaisé}} = 130 \rightarrow E_{\text{réel}} = 130 - 127 = 3$$

— $M = 110010100\ldots0 \rightarrow$ Mantisse = $1,1100101_2$.

et donc on abouti à la représentation en virgule flottante suivante :

$$-1,1100101_2 \times 2^3 = -1110,0101_2 = -11100101 \times 2^{-4} = -229 \times \frac{1}{16} = -14,3125$$