

## TD3 - Représentation des entiers naturels et opérations arithmétiques

### 1 Représentation des entiers naturels

#### 1.1 Codage

- ① Combien d'entiers naturels peut-on coder en binaire sur 1 octet ?
- ② Combien de bits faut-il pour représenter 65793 entiers naturels différents en binaire ?

#### Correction

- ① Un octet contient 8 bits, on peut donc coder  $2^8 = 256$  nombres entiers naturels.
- ② Avec  $b$  bits on peut représenter  $2^b$  entiers naturels différents, pour coder  $m$  entiers, il faut donc  $n$  bits tels que :

$$2^{n-1} < m \leq 2^n \Leftrightarrow n - 1 < \log_2 m \leq n$$

d'où  $n = \lceil \log_2 m \rceil$  ( $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ ;  $\alpha^n = \exp^{n \ln \alpha}$ ).

Pour  $m = 65793$ , on obtient  $n = \lceil \log_2 65793 \rceil = 17$ .

#### 1.2 Code de Gray

- Méthode de construction basique
  - Pour passer d'une ligne à la suivante, on inverse le bit le plus à droite possible qui introduit un nombre nouveau.
- ① Donner le code de Gray sur 3 bits en partant de 0 = 000.

#### Correction

Décimal	Gray	Décimal	Gray
0	000	4	110
1	001	5	111
2	011	6	101
3	010	7	100

- Méthode de construction par symétrie
  - Au départ, sur 1 bit, on utilise le code binaire naturel.
  - Lorsque l'on ajoute 1 bit supplémentaire, les nombres existants sont "symétrisés" comme dans un miroir (phénomène de réflexion, d'où l'autre nom code binaire réfléchi) pour obtenir les nouveaux nombres.
  - On ajoute 0 au début des nombres existants et 1 au début des nouveaux nombres.

<i>1 bit</i>		<i>2 bits</i>		
Decimal	Gray	Decimal		Gray
0	0	0	0	00
1	1	1	$\rightarrow \frac{1}{1}$	01
		2	1	11
		3	0	10

② Donner le code de Gray sur 4 bits.

**Correction**

Décimal	Gray	Décimal	Gray
0	0000	15	1000
1	0001	14	1001
2	0011	13	1011
3	0010	12	1010
4	0110	11	1110
5	0111	10	1111
6	0101	9	1101
7	0100	8	1100

## 2 Opérations arithmétiques

### 2.1 Addition

- ① Coder en binaire sur un octet les entiers 187 et 93, puis effectuer l'addition binaire des entiers ainsi codés. Vérifier que le résultat est correct.
- ② Même question avec 118 et 53.

**Correction**

- ①  $187_{10} = 10111011_2$   
 $93_{10} = 1011101_2$

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ (187) \\
 +\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ (93) \\
 \hline
 \mathbf{1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0}\ (24) \\
 \mathbf{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}\ (retenues)
 \end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits  $11000_2$ , ce qui n'est pas correct.

- ②  $118_{10} = 1110110_2$   
 $53_{10} = 110101_2$

$$\begin{array}{r}
1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ (118) \\
+ \quad 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ (53) \\
\hline
\mathbf{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ (171)} \\
\mathbf{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ (retenues)}
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits  $10101011_2$ .

## 2.2 Soustraction

- ① On considère les mêmes entiers que précédemment, mais cette fois il faut effectuer la soustraction des entiers. Soit calculer  $187 - 93$ ;
- ② puis  $118 - 53$ .
- ③ Pour finir, calculer  $14 - 7$ .

### Correction

- ①  $187_{10} = 10111011_2$   
 $93_{10} = 1011101_2$

$$\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ (187) \\
- \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ (93) \\
\hline
0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ (94) \\
0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ (retenues)
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits  $1011110_2$ .

- ②  $118_{10} = 1110110_2$   
 $53_{10} = 110101_2$

$$\begin{array}{r}
1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ (118) \\
- \quad 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ (53) \\
\hline
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ (65) \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ (retenues)
\end{array}$$

On obtient donc sur 8 bits  $01000001_2$ .

## 2.3 Multiplication

- ① Construire la table de multiplication.
- ② Essayer de poser la multiplication de 6 par 5.
- ③ Coder en binaire les entiers 87 et 49, puis effectuer la multiplication binaire des entiers ainsi codés. Même question pour 169 et 76.

## Correction

### ① Table de multiplication

Opérandes		Multiplication
x	y	$x \times y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### ② Multiplication de 6 par 5

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 0\ (6)\ \textit{(Multiplicande)} \\
 \times 1\ 0\ 1\ (5)\ \textit{(Multiplieur)} \\
 \hline
 1\ 1\ 0 \\
 0\ 0\ 0 \\
 + 1\ 1\ 0 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ (30)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1\ 1\ 0\ (6) \\
 \times 1\ 0\ 1\ (5) \\
 \hline
 1\ 1\ 0 \\
 + 1\ 1\ 0 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ (30)
 \end{array}$$

La multiplication consiste donc en une succession de recopier du multiplicande, de décalages et d'additions.

### ③ Multiplications (retenues en gras)

—  $87 \times 49$

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ (87) \\
 \times 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ (49) \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 + 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ (4263)
 \end{array}$$

On obtient  $1000010100111_2 = 4263_{10}$ .

—  $169 \times 76$

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ (169) \\
 \times 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ (76) \\
 \hline
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 + 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ (12844)
 \end{array}$$

On obtient  $11001000101100_2 = 12844_{10}$ .