TD2 - Numération, changement de base

1 Numération

On considère la base 14.

① Donner l'ensemble des chiffres de ce système de numération.

② Donner en comptant en base 14 la représentation dans cette base des nombres décimaux 6, 17 et 25.

③ Combien de nombres peut-on représenter avec 4 chiffres et donner l'expression permettant de calculer la valeur décimale (en base 10) d'un tel nombre $c_3c_2c_1c_0$.

Correction

① Dans un système de base b, un nombre est représenté par la suite de chiffres $c_nc_{n-1}\ldots c_0$ telle que $(c_i)_{10} \in \{0, \ldots, b-1\}$. Chaque c_i ne devant correspondre qu'à un seul chiffre, lorsque $(c_i)_{10} \geq 10$ on utilise une lettre majuscule comme chiffre en commençant avec A. En base 14 on a donc $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D\}$.

② Représentation de nombres décimaux

Decimal	Base 14	Decimal	Base 14
0	0	14	10
1	1	15	11
2	2	16	12
3	3	17	13
4	4	18	14
5	5	19	15
6	6	20	16
7	7	21	17
8	8	22	18
9	9	23	19
10	A	24	1A
11	B	25	1B
12	C	26	1C
13	D	27	1D

③ Chaque chiffre $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D\}$, il peut donc prendre 14 valeurs possibles. Aussi, un nombre $c_3c_2c_1c_0$ aura $14 \times 14 \times 14 \times 14 = 14^4 = 38416$ valeurs possibles.
Calcul de la valeur décimale N correspondant à $c_3c_2c_1c_0$ en base 14.

$$\begin{aligned}(c_3c_2c_1c_0)_{13} &= (c_3)_{10} \times 14^3 + (c_2)_{10} \times 14^2 + (c_1)_{10} \times 14^1 + (c_0)_{10} \times 14^0 = N \\ &= (c_3)_{10} \times 2744 + (c_2)_{10} \times 196 + (c_1)_{10} \times 14 + (c_0)_{10} \times 1 = N\end{aligned}$$

— c_3 a pour poids 2744 ;
— c_2 a pour poids 196 ;
— c_1 a pour poids 14 ;
— c_0 a pour poids 1.

2 Changement de base

2.1 Conversions en base 10

Donner la valeur décimale des nombres entiers suivants :

① 110011_2 et 1011010_2 ;

② 56324_8 et 1703_8 ;

③ $B5A97_{12}$;

④ $CE94_{16}$ et $3F5A_{16}$.

Correction

①

$$\begin{aligned} 110011_2 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 32 + 16 + 2 + 1 \\ &= 51_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1011010_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 64 + 16 + 8 + 2 \\ &= 90_{10} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} 56324_8 &= 5 \times 8^4 + 6 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 4 \times 8^0 \\ &= 5 \times 4096 + 6 \times 512 + 3 \times 64 + 2 \times 8 + 4 \times 1 \\ &= 20480 + 3072 + 192 + 16 + 4 \\ &= 23764_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1703_8 &= 1 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 3 \times 8^0 \\ &= 512 + 448 + 0 + 3 \\ &= 963_{10} \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} B5A97_{12} &= (B)_{10} \times 12^4 + (5)_{10} \times 12^3 + (A)_{10} \times 12^2 + (9)_{10} \times 12^1 + (7)_{10} \times 12^0 \\ &= 11 \times 12^4 + 5 \times 12^3 + 10 \times 12^2 + 9 \times 12^1 + 7 \times 12^0 \\ &= 11 \times 20736 + 5 \times 1728 + 10 \times 144 + 9 \times 12 + 7 \times 1 \\ &= 228096 + 8640 + 1440 + 108 + 7 \\ &= 238291_{10} \end{aligned}$$

④

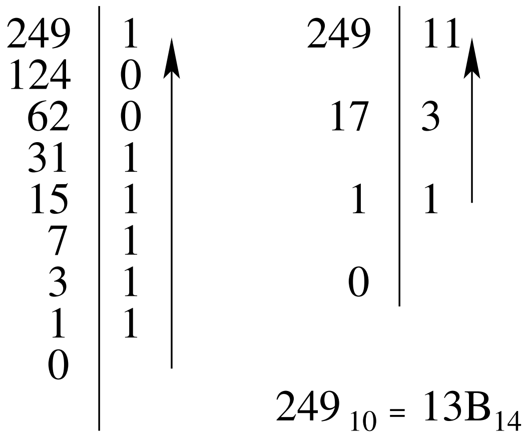
$$
\begin{aligned}
CE94_{16} &= 12 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 4 \times 16^0 \\
&= 12 \times 4096 + 14 \times 256 + 9 \times 16 + 4 \times 1 \\
&= 49152 + 3584 + 144 + 4 \\
&= 52884_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3F5A_{16} &= 3 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 10 \times 16^0 \\
&= 3 \times 4096 + 15 \times 256 + 5 \times 16 + 10 \times 1 \\
&= 12288 + 3840 + 80 + 10 \\
&= 16218_{10}
\end{aligned}
$$

2.2 Convertir 249_{10} en bases 2 et 14

$$
\begin{array}{r|l}
249 & 2 \\ \hline
1 & 124 \;|\; 2 \\
& 0 \;|\; 62 \;|\; 2 \\
& \quad 0 \;|\; 31 \;|\; 2 \\
& \quad\quad 1 \;|\; 15 \;|\; 2 \\
& \quad\quad\quad 1 \;|\; 7 \;|\; 2 \\
& \quad\quad\quad\quad 1 \;|\; 3 \;|\; 2 \\
& \quad\quad\quad\quad\quad 1 \;|\; 1 \;|\; 2 \\
& \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \;|\; 0
\end{array}
$$

- On a donc $249_{10} = 11111001_2$.



- On obtient $249_{10} = 13B_{14}$.

2.3 Coder l'entier 2766 successivement en base 2, 8, 16 ; 294 en base 16

$$
\begin{array}{r|l}
2766 & 0 \\
1383 & 1 \\
691 & 1 \\
345 & 1 \\
172 & 0 \\
86 & 0 \\
43 & 1 \\
21 & 1 \\
10 & 0 \\
5 & 1 \\
2 & 0 \\
1 & 1 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2766 & 6 \\
345 & 1 \\
43 & 3 \\
5 & 5 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2766 & 14 \\
172 & 12 \\
10 & 10 \\
0 &
\end{array}
$$

- On obtient ainsi pour 2766

$$
\begin{aligned}
2766 &= 101011001110_2 \\
&= \ 5 \quad 3 \quad 1 \quad 6_8 \\
&= \quad A \quad\ C \quad\ E_{16}
\end{aligned}
$$

- alors que pour 294 on a

$$
\begin{aligned}
294 &= 100100110_2 \\
&= 1 \ 2 \ 6_{16}
\end{aligned}
$$

2.4 Donner la valeur décimale du nombre 10110, dans le cas d'un codage en base 2, 8 ou 16

- $10110_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 16 + 4 + 2 = 22_{10}$.
- $10110_8 = 1 \times 8^4 + 1 \times 8^2 + 1 \times 8^1 = 4096 + 64 + 8 = 4168_{10}$.
- $10110_{16} = 1 \times 16^4 + 1 \times 16^2 + 1 \times 16^1 = 65536 + 256 + 16 = 65808_{10}$.

2.5 Conversion rapide hexadécimal vers binaire / octal et binaire vers octal / hexadécimal

- $7D9B24_{16}$ en bases 2 et 8

$$
\begin{array}{l}
\quad 7 \qquad\quad D \qquad\quad 9 \qquad\quad B \qquad\quad 2 \qquad\quad 4 \quad {}_{16} \\
0\,1\,1\,1\;\;1\,1\,0\,1\;\;1\,0\,0\,1\;\;1\,0\,1\,1\;\;0\,0\,1\,0\;\;0\,1\,0\,0 \quad {}_{2} \\
\quad 3 \qquad 7 \qquad 3 \qquad 1 \qquad 5 \qquad 4 \qquad 4 \qquad 4 \quad {}_{8}
\end{array}
$$

- 10011010101_2 en bases 8 et 16

$$
\begin{array}{l}
\quad 4 \qquad\quad D \qquad\quad 5 \quad {}_{16} \\
\;\;1\,0\,0\;\;1\,1\,0\,1\;\;0\,1\,0\,1 \quad {}_{2} \\
\quad 2 \qquad 3 \qquad 2 \qquad 5 \quad {}_{8}
\end{array}
$$