IUT de Belfort - Montbéliard
DUT Informatique 1er année
2008-2009
ALUSTWANI Husam

Arithmétique numérique

Résolution des équations (**Méthode de dichotomie**)

But du jeu :

On désire trouver une ou plusieurs solutions de l'équation f(x) = 0.

- **Cas simples** : On peut exprimer une solution d'une équation à partir de la fonction, par exemple, celui d'une équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ pour lequel $s = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$
- **Dans les autres cas**, On utilise des méthodes dites *méthodes des approximations successives*. Elles permettent de trouver une valeur approchée (à ε près) de la solution. On construit une suite, avec l'espoir qu'elle tende vers la solution s ($f(s) = 0$) du problème. Selon la méthode (algorithme) utilisée, on approche plus ou moins vite de la solution. Plus la méthode converge vite vers la solution mieux c'est car elle exige moins de calculs et donc elle provoque moins d'*erreurs numériques* (cf. TP-1). D'ailleurs, elle donne la solution plus vite. Nous comparerons trois méthodes (dichotomie, Lagrange, point fixe).

Méthode de dichotomie ‘‘bisection’’

A. **Principe de la méthode**

Une fonction *continue* ne peut changer de signe qu'en prenant la valeur Zéro.

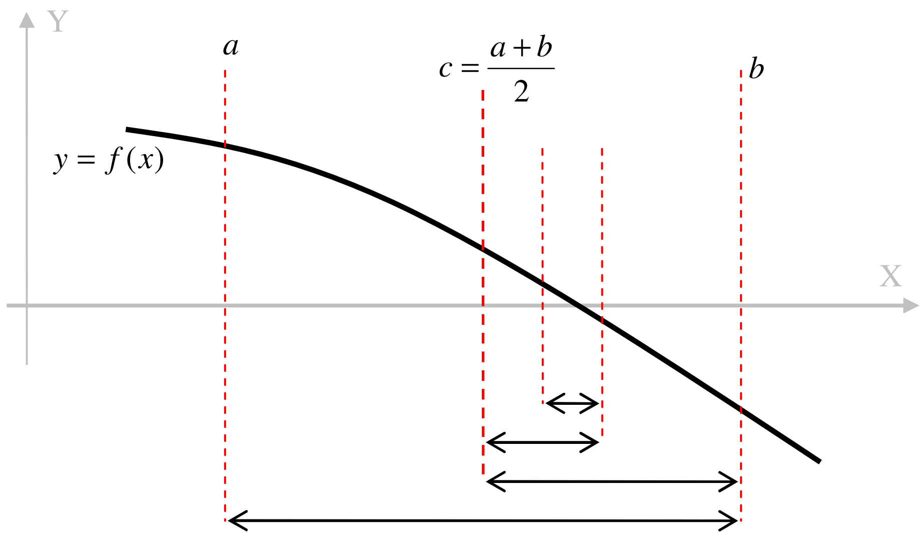
1. *Encadrer la solution cherchée* :

   On choisit un intervalle $[a,b]$: $f(a) \cdot f(b) \prec 0$. Si f est strictement *monotone* sur $[a,b]$, la solution se trouvant dans $[a,b]$ est alors unique.
2. *Diviser par 2 la longueur de l'intervalle encadrant la solution cherchée :*

   On choisit $c = \dfrac{a+b}{2}$ et on calcule $f(c)$.
3. *Un des trois cas suivants est possible :*
   a. $f(c) = 0$: alors c est la solution. ($|f(c) - 0| \prec \varepsilon$)
   b. $f(a) \cdot f(c) \prec 0$: alors la solution est dans l'intervalle $[a,c]$
   c. $f(a) \cdot f(c) \succ 0$: alors la solution est dans l'intervalle $[c,b]$

4. *Recommencer :*

   Nous avons divisé par 2 la longueur de l'intervalle encadrant la solution recherchée. On itère le processus jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle obtenu soit assez petit pour nous donner la solution avec la précision recherchée.



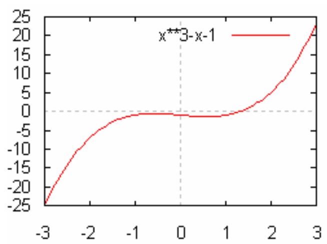
B. La méthode en pleine action :

- http://www.cs.queensu.ca/~jstewart/applets/roots/roots.html
- http://www.eudil.fr/eudil/jbeuneu/bissection/bissect.html

C. Au travail ☺

- Sachant que la solution réelle de l'équation $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ se trouve dans l'intervalle $[1,2]$, calculez pour les précisions suivantes : la solution correspondante et le nombre d'itérations effectuées pour l'obtenir.

Précision ε	La solution correspondant	Le nombre d'itération
10^{-3}	$\pm 10^{-3}$	
10^{-5}	$\pm 10^{-5}$	
10^{-7}	$\pm 10^{-7}$	



- *Test d'arrêt :* Lequel des deux tests suivants préférez-vous, et pourquoi ?

1. Pour chaque intervalle $[z_1, z_2]$ trouvé, on teste si sa longueur $l = |z_1 - z_2|$ est assez petite pour garantir la précision recherchée.

2. En remarquant qu'après n itérations la longueur de l'intervalle obtenu sera $l = \frac{|b-a|}{2^n}$, on peut calculer a priori le nombre d'itérations nécessaires pour garantir la précision recherchée ($\varepsilon = \frac{l}{2}$). $n = 1 + \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \right\rfloor$

D. Pour en savoir plus

- http://ia.loa.espci.fr/dc/espci/zeros/zeros.html#Dichotomie