IUT de Belfort - Montbéliard
DUT Informatique 1er année
2008-2009
ALUSTWANI Husam

Arithmétique numérique

Intégration numérique

Il existe beaucoup de fonctions numériques pour lesquelles on ne sait pas exprimer une primitive avec des fonctions connues (exemple : $x \to e^{-\sqrt{x}}$, $x \to \dfrac{\sin x}{x}$, ...), donc pour lesquelles on ne peut pas calculer de façon exacte l'intégrale sur un segment.
D'autre part, il existe des fonctions qui ne sont connues que par leur valeurs numériques en différents points de l'intervalle sur lequel on désire calculer l'intégrale (exemple : fonctions définies par des résultats expérimentaux).
En conséquence, il est nécessaire de disposer de méthodes numériques de calcule d'intégrales.
On s'intéresse ici à deux méthodes, la méthode des rectangles et la méthode des trapèzes.

A. Principe de l'intégration numérique

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$: f est continue sur $[a,b]$ (calculer l'aire, ...), nous procédons ainsi :

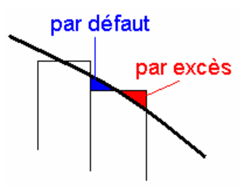
1. Diviser l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles égaux
   $[x_i, x_{i+1}] : i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ avec $x_i = a + \dfrac{b-a}{n} \times i$. ($x_0 = a, x_n = b$)
2. Approximer sur chacun de ces intervalles la fonction f par une fonction « facile à intégrer ». Dans ce qui suit, la fonction choisie sera polynomiale.
3. Approximer l'intégrale recherché $\int_a^b f(x)dx$ par la somme des intégrales de ces polynômes sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

B. Méthode des rectangles

Sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction est approchée par le polynôme constant égale à la valeur de f au milieu de $[x_i, x_{i+1}]$; ceci conduit à approcher l'intégrale par :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

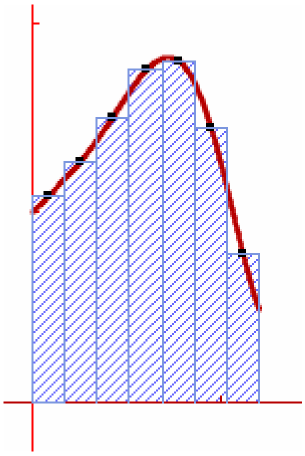
Le choix du milieu de l'intervalle permet d'espérer que les erreurs par excès et par défaut se compenseront, au moins en partie.



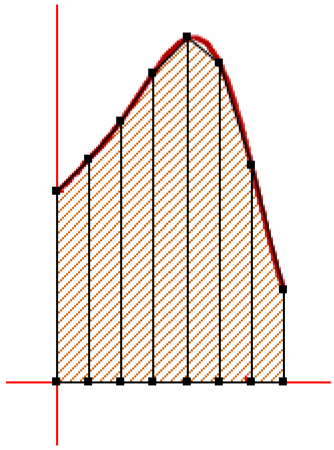
La méthode en pleine action

- http://www.iecn.u-nancy.fr/~sokolows/support/node14.html

C. Méthode des trapèzes



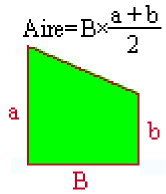
Méthode de rectangles



Méthode de trapèzes

Cette méthode consiste à remplacer la courbe représentative de *f* par une ligne brisée et à calculer l'aire de chaque trapèze. Ainsi, l'intégrale recherchée est approchée par la somme de ces aires :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{1}^{n-1}f(x_i)\right]$$

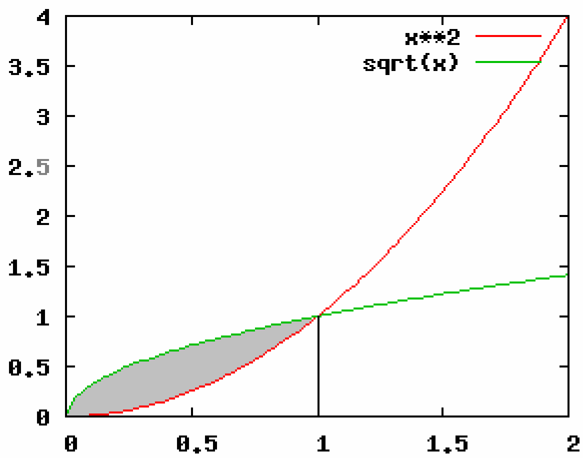


La méthode en pleine action

- http://www.eudil.fr/eudil/jbeuneu/trapezes/trapez.html
- http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/ressources/integral/Int2.html
- http://homeomath.imingo.net/methtrap.htm

D. A la pratique ☺

Comparer la valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$ obtenue en utilisant la méthode des rectangles avec celle obtenue en utilisant la méthode des trapèzes, pour chacune des valeurs $n=\{10,50,100,500\}$. Qu'en déduisez-vous ?



E. Pour en savoir plus

- http://www.iecn.u-nancy.fr/~sokolows/support/node12.html
- http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/aloui/matlab/41integr/41integr.htm#21