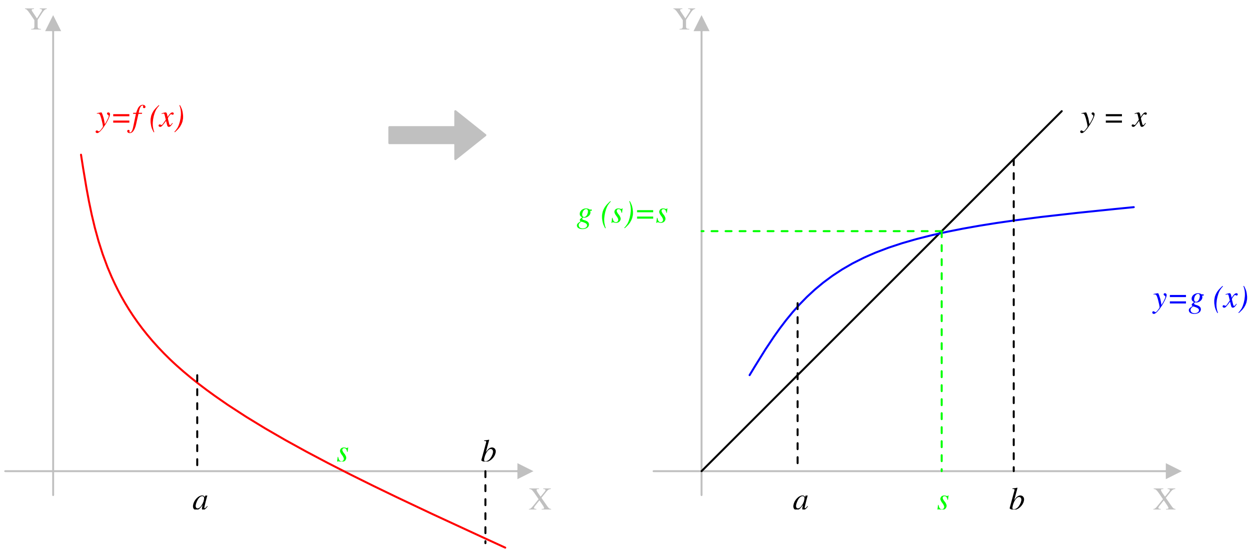
IUT de Belfort - Montbéliard
DUT Informatique 1[er] année
2008-2009
ALUSTWANI Husam

Arithmétique numérique

Résolution des équations (**Méthode du point fixe)**

La résolution de l'équation $f(x)=0$ peut se ramener à la résolution d'un autre problème mathématique connu, *la recherche du point fixe*. C'est à dire la résolution de l'équation $x=g(x)$, sous réserve que ces deux formulations soient mathématiquement équivalentes. Cette méthode est très simple à programmer, mais la convergence n'est garantie que sous certaines conditions.



A. Principe de la méthode

1. *Déterminé un intervalle* $[a,b]$ contenant une seule solution de l'équation $f(x)=0$.

2. *Transformer l'équation* $f(x)=0$ *en une équation du type* $x=g(x)$:

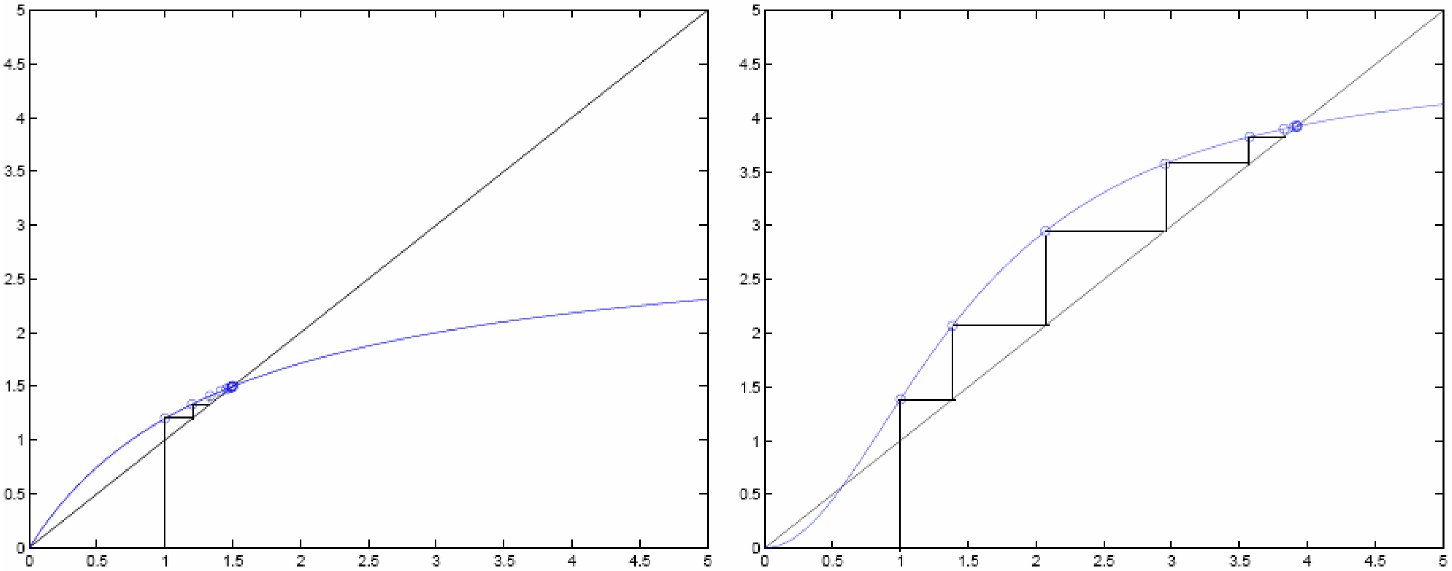
   L'écriture sous la forme $x=g(x)$ n'est pas unique. Or, g choisi doit vérifier les propriétés suivantes :
   - g continue et dérivable sur $[a,b]$
   - $g([a,b])\subseteq[a,b]$
   - $|g'(x)|\prec 1$ sur $[a,b]$

3. *Choisir* x_0 *dans l'intervalle* $[a,b]$

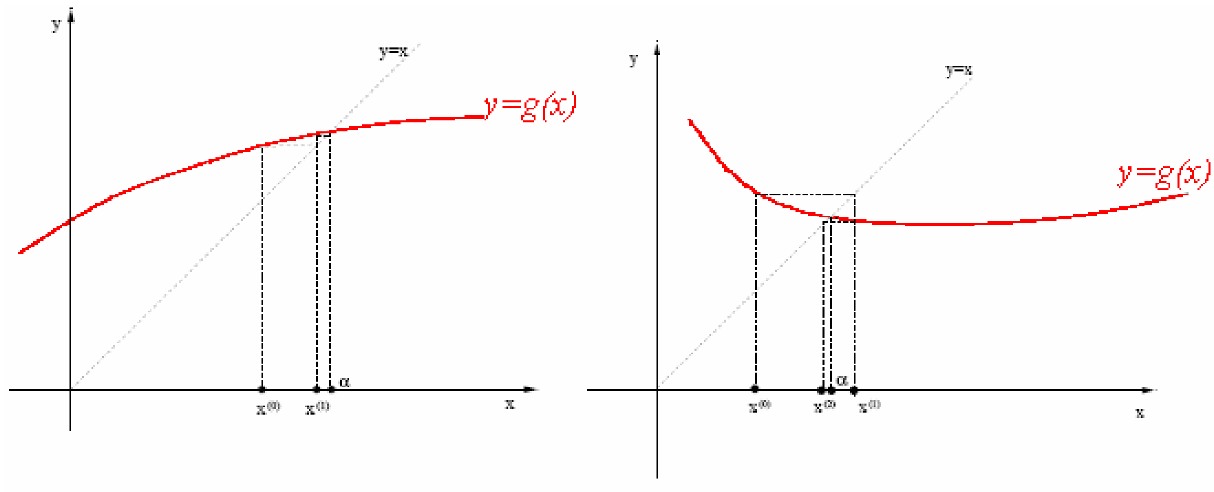
4. *Calculer la solution approximative :*

   En utilisant la formule $x_{n+1}=g(x_n)$ et ceci jusqu'à ce que $g(x_n)$ soit assez proche de x_n ($|g(x_n)-x_n|\prec\varepsilon$).

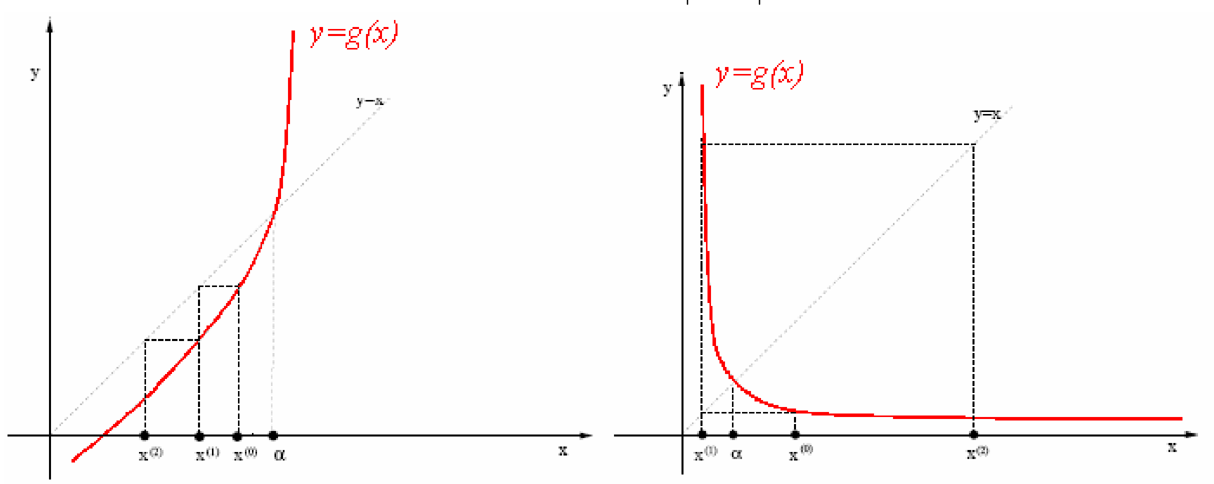
B. La méthode en action



Exemple de y=g(x) avec y=x

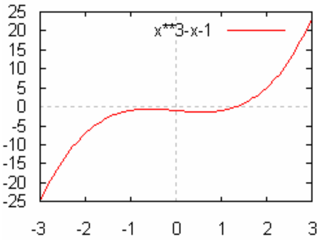


Cas de convergence $|g'(x)| \prec 1$

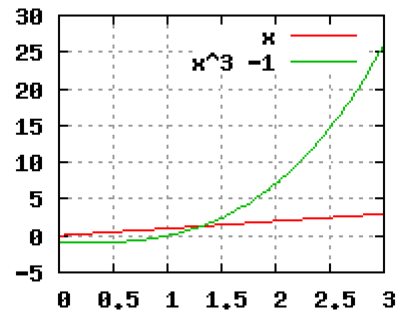
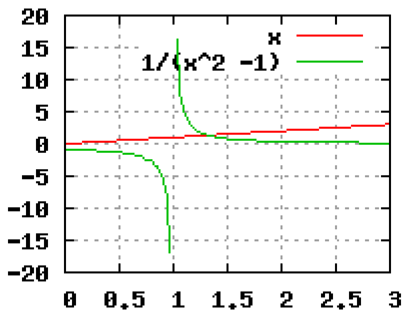
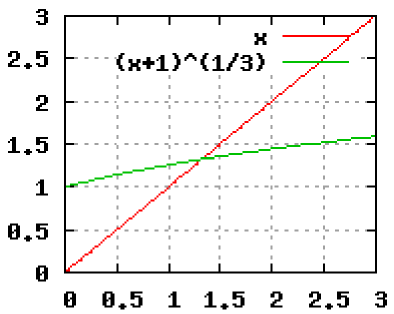


Cas de divergence $|g'(x)| \succ 1$

C. A la pratique ☺



Nous allons encore résoudre l'équation $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ en utilisant la méthode du point fixe. Nous savons déjà que la solution se trouve dans l'intervalle $]1,2[$. Nous allons prendre $x_0 = 2$. Après avoir implémenté l'algorithme du point fixe, testez le pour chacun des choix suivants de g.

<table>
<tr><th></th><th>$x = g(x)$</th><th colspan="3">Les résultats</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$x = x^3 - 1$</td><td colspan="3">Vérifiez et expliquer la Divergence
La divergence rapide s'explique par la pente supérieure à 1 au voisinage de la solution. $|g'(x)| \succ 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$x = \dfrac{1}{x^2 - 1}$</td><td colspan="3">Vérifiez et expliquer la Divergence
Dans ce cas la divergence est due à la violation de la condition $g([a,b]) \subseteq [a,b]$
($g(]1,2[) \not\subset]1,2[$)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td rowspan="4">$x = \sqrt[3]{x+1}$</td><td>Précision ε</td><td>La solution correspondant</td><td>Le nombre d'itération</td></tr>
<tr><td>10^{-3}</td><td>$\pm 10^{-3}$</td><td></td></tr>
<tr><td>10^{-5}</td><td>$\pm 10^{-5}$</td><td></td></tr>
<tr><td>10^{-7}</td><td>$\pm 10^{-7}$</td><td></td></tr>
</table>

- Comparer ces résultats avec ceux que vous avez obtenus avec la méthode de dichotomie et la méthode de Lagrange (cf. TP-2 et TP-3). Parmi ces trois méthodes laquelle est la plus rapide ? Autrement dit, laquelle donne le résultat (l'approximation recherchée) le plus rapidement ?

D. Pour en savoir plus

- **http://ia.loa.espci.fr/dc/espci/zeros/zeros.html#PointFixe**