Analyse Mathématique

Christophe GUYEUX
guyeux@iut-bm.univ-fcomte.fr

26 mai 2008

Table des matières

Chapitre 1

Suites numériques

DÉFINITION 1 (SUITE). *Une suite* u *est une application d'une partie de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On note* u_n *au lieu de* $u(n)$ *sa valeur en* $n \in \mathbb{N}$. $\diamondsuit$

1.1 Notions de base

1.1.1 Monotonie

DÉFINITION 2 (CROISSANCE, DÉCROISSANCE, MONOTONIE). *Une suite est dite croissante lorsqu'elle vérifie*

$$u_{n+1} \geqslant u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

et strictement croissante en cas d'inégalité stricte.
On parle de suite (strictement) décroissante lorsque l'inégalité est dans l'autre sens.
Une suite vérifiant l'une de ces propriétés est dite (strictement) monotone. $\diamondsuit$

Exercice 1. *Donnez des exemples de suites qui ne sont pas monotones.*

PROPRIÉTÉ I : Pour montrer qu'une suite est croissante, il suffit de vérifier l'une des propriétés suivantes :

1. $u_{n+1} - u_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), valable pour toutes les suites.
2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, valable pour les suites strictement positives
3. $f' \geqslant 0$ pour les suites de la forme $u_n = f(n)$.

Exercice 2. *Étudiez la monotonie de la suite* $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

Exercice 3. *Faire de même avec* $u_n = \dfrac{n}{lnn}$

DÉFINITION 3 (SUITES STATIONNAIRES). *Une suite est dite stationnaire lorsqu'elle est constante (au moins à partir d'un certain rang).* ♢

1.1.2 Convergence d'une suite

DÉFINITION 4 (CONVERGENCE D'UNE SUITE (VERSION INTUITIVE)). *Une suite* u *converge vers une limite* l *lorsque ses termes se rapprochent indéfiniment de* l. ♢

REMARQUE 1. C'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite u sont dans l'intervalle [l-0,001 ; l+0,001] (sont proches de l à 0,001 près : $|u_n - l| < 0,001$)...et qu'à partir d'un autre rang, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle [l-0,000001 ; l+0,000001], etc.

Bref, aussi près que l'on se place de la valeur l, il y aura un rang à partir duquel tous les u_n seront là.

En d'autres termes, aussi petite que soit la valeur ε, il existera un rang N à partir duquel tous les u_n seront proches de l à ε-près :

DÉFINITION 5 (CONVERGENCE (VERSION RIGOUREUSE)). *Une suite* u *converge vers une limite* l *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Exercice 4. *Montrez, en utilisant la définition précédente, que la suite* $u_n = \dfrac{3}{n}$ *converge vers 0.*

Exercice 5. *Montrez, en utilisant à nouveau la définition rigoureuse de convergence, que si u converge, alors $|u_{n+1} - u_n|$ tend vers 0 (l'écart entre deux termes consécutifs s'amoindrit indéfiniment).*

REMARQUE 2 (THÉORÈME DES GENDARMES). On rappelle que, lorqu'une suite v est encadrée par deux autres suites, qui admettent la même limite l, alors v tend aussi vers l.

Exercice 6. *Calculez la limite de la suite* $v_n = 0,5 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

1.1.3 Divergence d'une suite

DÉFINITION 6 (SUITES DIVERGENTES). *Une suite qui ne converge pas est dite divergente.* ♢

REMARQUE 3. Un cas particulier se dégage : celui où la suite devient aussi grande (positivement, ou négativement) que l'on veut, c'est-à-dire quand elle tend vers un infini.

Pour traduire rigoureusement ce comportement (en $+\infty$, par exemple), on l'exprime de la manière suivante : aussi grande que soit la valeur A, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont au-dessus de A...

PROPRIÉTÉ II (DIVERGENCE EN $+\infty$) : Une suite tend vers $+\infty$ si, et seulement si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n > A$$

(On a la même expression pour la divergence en $-\infty$).

Exercice 7. *Montrez que la suite $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$.*

Exercice 8. *Étudiez la limite de la suite $u_n = -2\sqrt{n} + 1$.*

REMARQUE 4. Dans le cas d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle en n (comme dans l'exercice précédent), on rappelle qu'il suffit de mettre en facteur les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur (ce qui fait apparaître des termes négligeables).

Exercice 9. *Montrez, en utilisant la propriété précédente, que la suite $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ tend vers $+\infty$.*

Exercice 10. *Calculez la limite de $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$.*

Exercice 11. *Etudiez la convergence des suites $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n + 2}$ et $v_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 4}$.*

Exercice 12. *Appliquez la même idée pour calculez la limite de $u_n = \sqrt{n} - 2n$.*

1.1.4 Monotonie et convergence

PROPRIÉTÉ III : Étant donnée une suite croissante, deux cas peuvent se produire :

- la suite est majorée, donc elle converge,
- la suite n'est pas majorée, donc elle diverge vers $+\infty$.

REMARQUE 5. On a un énoncé analogue en remplaçant majorée par minorée, et croissante par décroissante.

Exercice 13. *Etudiez la convergence de la suite définie par*

$$u_0 = x \in \mathbb{R}_+, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

Exercice 14. *Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.*

1. *Montrez que la suite u est croissante.*
2. (a) *Démontrez que $\forall m \in \mathbb{N}^*, u_{2m} - u_m \geqslant \frac{1}{2}$.*

   (b) *Déduire de l'inégalité précédente (appliquée à plusieurs termes de la suite) que $u_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$*
3. *En déduire que la suite u n'est pas majorée. Quelle est sa limite ?*

1.1.5 Suites adjacentes

DÉFINITION 7 (SUITES ADJACENTES). *Deux suites u et v sont dites adjacentes lorsque l'une croît, l'autre décroît, et l'écart $|u_n - v_n|$ tend vers 0.* $\diamondsuit$

PROPRIÉTÉ IV : Deux suites adjacentes convergent, et vers la même limite.

Exercice 15. *Montrer ce résultat fondamental des suites adjacentes. On pourra procéder ainsi (en supposant que u est la suite croissante) :*

1. *Montrer que $\forall n, u_n < v_0$, et que $\forall n, v_n > u_0$.*
2. *u est une suite croissante et majorée, donc converge vers l_u. De même,* mutatis mutandis *pour v, vers l_v.*
3. *Utilisez enfin $|u_n - v_n| \to 0$ pour prouver que $l_u = l_v$.*

Exercice 16. *Soient*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. *Montrer que ce sont des suites adjacentes (donc convergentes).*
2. *Montrez que $\frac{\pi^2}{6} - u_n < 10^{-4}$ à partir d'un certain rang (on ne demande pas une démonstration, mais une résolution numérique.)*

1.2 Notions avancées

1.2.1 Suites de Cauchy

DÉFINITION 8 (SUITES DE CAUCHY). *Les suites telles que l'écart entre deux termes consécutifs s'amoindrit indéfiniment, sont appelées suites de Cauchy.* $\diamondsuit$

Les suites de Cauchy d'un espace donné sont donc les suites susceptibles de converger.

REMARQUE 6. Il existe des définitions plus rigoureuses des suites de Cauchy, qu'il conviendrait de comprendre, comme :

$$\lim_{n} \operatorname{Sup}_{p,q>n} |r_p - r_q| = 0$$

ou encore

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2), |r_p - r_q| < \varepsilon$$

PROPRIÉTÉ V (CRITÈRE DE CAUCHY) : Une suite de nombres réels ou complexes converge si et seulement si elle est de Cauchy.

S'il est clair qu'une suite convergente vérifie la propriété de Cauchy (« l'écart entre deux termes successif s'amoindrit indéfiniment »), il ne faut pas croire que la réciproque est assurée.

Dans les espaces raisonnables, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cette réciproque est assurée : une suite dont l'écart s'amoindrit indéfiniment, est convergente (c'est, précisément, le critère de Cauchy)... MAIS il existe des suites de Cauchy non convergentes, dès que l'on ne se place plus dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

EXEMPLE 1. On définit une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ par

$$u_n = \frac{E\left(10^n \pi\right)}{10^n}$$

dont les premiers termes sont 3 ; 3,1 ; 3,14 ; 3,141 etc.

Cette suite de rationnels vérifie le critère de Cauchy, mais n'a pas de limite (dans son ensemble d'arrivée $\mathbb{Q}$.

DÉFINITION 9 (ESPACES COMPLETS). *Les espaces particuliers dans lesquels les suites de Cauchy sont toutes convergentes, sont appelés* espaces complets. $\diamondsuit$

EXEMPLE 2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, pas $\mathbb{Q}$.

REMARQUE 7. Le terme complet est bien choisi.

REMARQUE 8. Cette notion de suites de Cauchy est fondamentale, au point que la construction standard de $\mathbb{R}$ utilise les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$: un nombre réel est, par définition, la limite d'une suite de Cauchy de rationnels.

Donnons encore quelques propriétés des suites de Cauchy, avant de clore ce paragraphe « culturel ».

PROPRIÉTÉ VI : Toute suite de Cauchy est bornée.

1.2.2 Valeurs d'adhérence

DÉFINITION 10 (VALEUR D'ADHÉRENCE). *On appelle* valeur d'adhérence *d'une suite, toute valeur à proximité de laquelle la suite revient infiniment souvent.* $\diamondsuit$

Exercice 17. *Trouvez une suite :*

1. *n'admettant aucune valeur d'adhérence,*
2. *ayant une unique valeur d'adhérence,*
3. *ayant trois valeurs d'adhérence,*
4. *ayant une infinité de valeurs d'adhérence.*

PROPRIÉTÉ VII : Une suite est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

REMARQUE 9. Cela, bien sûr, dans des espaces raisonnables. On peut se demander si cette équivalence est toujours vérifiée...

Les plus curieux pourront se renseigner sur la notion d'espaces séparés.

PROPRIÉTÉ VIII : Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence. Si elle en a une, elle converge.

1.3 Suites Récurrentes

DÉFINITION 11 (SUITE RÉCURRENTE). *Une suite est récurrente lorsqu'il existe une fonction* f *telle que*

$$u_{n+1} = \mathrm{f}(u_n)$$

1.3.1 Suites arithmétiques

DÉFINITION 12 (SUITE ARITHMÉTIQUE). *Une suite est arithmétique lorsque l'écart entre deux termes successifs quelconques est constant :*

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Cette constante r est appelée la raison de la suite arithmétique u. ♢

REMARQUE 10. De telles suites sont donc pleinement définies par leurs premier terme et leurs raisons.

REMARQUE 11. La monotonie d'une suite arithmétique ne dépend uniquement que du signe de r ; quant à la convergence, elle n'a lieue que lorsque $r = 0$ (dans les autres cas, la suite diverge vers l'un des deux infinis).

La relation fondamentale entre deux termes quelconques d'une suite arithmétique de raison r est :

PROPRIÉTÉ IX : Pour toute suite arithmétique u de raison r, on a

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p + (n-p)r$$

EXEMPLE 3. $u_n = u_0 + nr$

EXEMPLE 4. $u_n = u_1 + (n-1)r$.

PROPRIÉTÉ X : La somme S de termes en progression arithmétique est donnée par

$$S = \frac{\text{(premier terme + dernier terme)}}{2} \text{ x nombre de termes}$$

EXEMPLE 5. $u_0 + u_1 + ... + u_n = \dfrac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$

EXEMPLE 6. $u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{(u_1 + u_n)n}{2}$

EXEMPLE 7. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$

1.3.2 Suites géométiques

DÉFINITION 13 (SUITE GÉOMÉTIQUE). *On a affaire à une suite géométrique lorsque l'on passe d'un terme à son successeur en multipliant systématiquement par une constante q, appelée raison de la suite géométrique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$$

REMARQUE 12. Comme pour les suites arithmétiques, on détermine complètement les suites géométriques en se fixant une raison et un terme (par exemple, le premier).

PROPRIÉTÉ XI : On obtient le n^{ieme} terme à partir du p^{ieme} par la formule

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p q^{n-p}$$

EXEMPLE 8. $u_n = u_0 q^n$.

EXEMPLE 9. $u_n = u_1 q^{n-1}$.

PROPRIÉTÉ XII (CONVERGENCE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE) : La convergence et la monotonie d'une telle suite dépendent de la valeur de q :

- si $q > 1$, alors la suite tend vers $+\infty$ en croissant, ou vers $-\infty$ en décroissant (selon le signe du premier terme),
- si $q = 1$, la suite est constante,
- si $-1 < q < 1$ la suite tend vers 0, et il n'y a monotonie que dans le cas où q est positive,
- sinon, il n'y a ni convergence, ni monotonie (la suite est tantôt positive, tantôt négative).

REMARQUE 13. Ces résultats, comme tant d'autres, sont à comprendre, et non à apprendre par coeur.

Exercice 18. *Etudiez la limite des suites*

$$u_n = \frac{3(0,2)^n - 1}{(0,2)^n + 4} \textit{ et } v_n = \frac{n(0,5)^n}{n+1}.$$

PROPRIÉTÉ XIII (SOMME DE TERMES) : La somme S de termes en progression géométique, de raison différente de 1, est donnée par

$$S = \text{premier terme}\frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

EXEMPLE 10. $u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

EXEMPLE 11. $u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1\frac{1-q^n}{1-q}$

Exercice 19. *Calculez la somme*

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 256$$

Exercice 20. *Calculez la somme*

$$S = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{9765625}$$

Exercice 21. *Calculez de même*

$$S = \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots + \frac{1}{19683}$$

1.3.3 Suites arithmético-géométriques

DÉFINITION 14 (SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES). *Ce sont les suites de la forme* $u_{n+1} = au_n + b$*.* ♢

EXEMPLE 12. En faisant a=1, on retrouve les suites arithmétiques, et en posant b=0 on retrouve les suites géométriques.

REMARQUE 14. Pour les étudier, on pose $v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$, et on vérifie que l'on a alors $v_{n+1} = av_n$: la suite v est géométrique, donc on peut se référer à l'étude précédente pour la connaître en détail (et donc estimer par-là même le comportement de la suite d'origine u).

1.3.4 Suites définies par une récurrence à deux termes

DÉFINITION 15 (SUITES RÉCURRENTES À DEUX TERMES). *Ce sont les suites de la forme* $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$. ♢

EXEMPLE 13. $3u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$.

PROPRIÉTÉ XIV : Pour obtenir les expressions explicites (u_n en fonction de n exclusivement) de toutes les suites de cette forme, on résout l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$, et alors

– si $\Delta > 0$, on trouve les solutions r_1 et r_2 de cette équation, et alors

$$u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes qui peuvent être déterminées grâce aux deux premiers termes.

– $si \Delta = 0$, le trinôme $r^2 + ar + b = 0$ admet une racine double r_0, et alors

$$u_n = C_1 r_0^n + C_2 n r_0^n$$

Exercice 22 (Suite de Fibonacci). *La suite de Fibonacci est définie par la relation de récurrence :*

$$u_0 = 1, u_1 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. *Calculez les premiers termes de la suite.*
2. *Exprimez* u_n *en fonction de* n *(uniquement).*

Exercice 23. *Soit* u_n *la suite définie par* $u_0 = 0, u_1 = 1$*, et*

$$6\ u_{n+2} = 5\ u_{n+1} - u_n$$

Déterminer une formule explicite pour u_n, et en déduire la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

.

1.3.5 Cas général des suites définies par itération

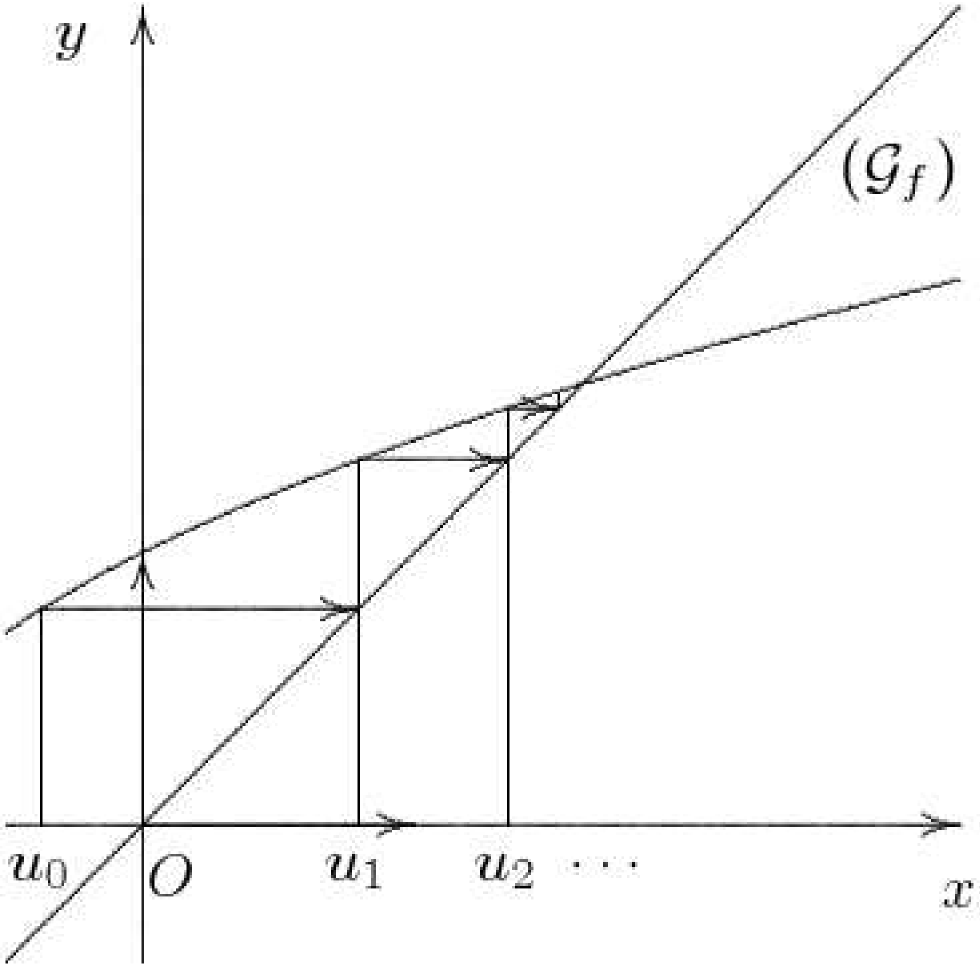
DÉFINITION 16 (SUITES DÉFINIES PAR ITÉRATION). *Ce sont les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, qu'il convient de distinguer des suites de la forme $u_n = f(n)$; elles sont généralement plus difficiles à étudier.* $\diamondsuit$

REMARQUE 15. Les propriétés de telles suites dépendent de celles de la fonction f, et comme celle-ci voit son comportement changer selon l'intervalle où l'on se trouve, on est souvent amené à étudier les intervalles I de stabilité de f : ceux qui vérifient $f(I) \subset I$. En effet, si un terme de la suite u_n tombe dans un tel intervalle I, alors tous ses successeurs restent dans I : on sait ce que fait la suite.

Par exemple, si f est croissante sur un intervalle de stabilité I, et si un u_k tombe dans I, alors la suite devient croissante à partir de ce rang, et reste dans I : elle est croissante et majorée, donc convergente (on n'a pas de résultat analogue lorsque la fonction est décroissante.)

Dans le même esprit, si f est continue, alors la limite l en est un point fixe : elle vérifie $l = f(l)$.

Enfin, à partir du graphe de la fonction f, on peut obtenir graphiquement chacun des termes de la suite (sans avoir à les calculer) et comprendre son comportement global.



L'étude des suites non convergentes de ce type est un sujet à la mode : c'est une des approches possibles de la théorie du chaos, et si la démonstration des résultats, même les plus simples, s'avère très délicate, il est par contre aisé d'explorer informatiquement les comportements de ces suites, faisant en particulier apparaître des fractales.

Exercice 24. *Etudiez, en utilisant le précédent cheminement, la suite définie par*

$$u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Exercice 25. *On suppose que u est une suite réelle sans problème de définition, et qui vérifie*

$$u_{n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{u_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$$

1. *Démontrez que si (u_n) converge, alors sa limite est 2.*
2. *Exprimez $u_{n+1} - 2$ en fonction de $u_n - 2$ [astucieux]. A quelle condition sur u_0 existe-t-il n tel que $u_n = 2$?*
3. *On suppose que u_0 est différent de 2, et on définit une nouvelle suite v par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.*
   (a) *Montrez que v est arithmétique.*
   (b) *Exprimez u_n en fonction de u_0 et de n.*
   (c) *Etudiez la convergence de u.*

1.4 Exercices

Exercice 26. *Etudiez la suite $u_n = n^2 \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$.*

Exercice 27. *Etudiez la convergence de la suite u définie par*

$$u_0 = x \in [0; 3\pi], u_{n+1} = u_n + \sin u_n$$

Exercice 28. *Soient u et v deux suites telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

et $A > 0$.

1. *Montrez qu'à partir d'un certain rang, $u_n \in]-1,5; -0,5[$, et $v_n > A$,*
2. *En déduire que $\lim(u_n v_n) = -\infty$.*

Exercice 29. *Étudiez la convergence de la suite* $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2002}$.

Exercice 30. *Faire de même avec la suite* $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)$.

Exercice 31. *Etudiez la convergence des suites*

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
2. $v_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$,
3. $w_n = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 32. *Etudiez la suite définie par*

$$u_0 = 3, u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}.$$

Fin du Chapitre

Chapitre 2

Continuité

2.1 Langage de la continuité

2.1.1 Définition de la continuité

DÉFINITION 1 (CONTINUITÉ). *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à va leurs réelles, et $a \in I$.*

- *f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à $f(a)$,*
- *f est continue sur l'intervalle I lorsqu'elle l'est en tout point de I.* $\diamondsuit$

REMARQUE 1. Une fonction à valeurs complexes est continue si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont.

REMARQUE 2. En premiere approximation, une fonction est continue lorsque sa courbe est en un seul tenant (on peut la tracer sans lever le crayon).

REMARQUE 3. On parle de continuité à droite (resp. à gauche) en a lorsque la limite précédente est en a^+ (resp. en a^-). Une fonction est alors continue en a si et seulement si elle l'est à droite et à gauche en a.

2.1.2 Exemples de fonctions continues

1. les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$,
2. la fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$,
3. la fonction partie entière :

$$E: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & n \text{ tel que } n \leqslant x < n+1 \end{array}$$

   est discontinue en tout point de $\mathbb{N}$ (elle est continue à droite en ces points), et continue partout ailleurs.

4. la fontion exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, la fontion logarithme népérien est continue sur son domaine de définition ($]0, +\infty[$).
5. la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE 4. Si les fonctions usuelles sont en général continues sur (presque) tout leur ensemble de définition, il ne faudrait pas voir en cela une règle générale : il existe en effet des fonctions discontinues en tout point. La fonction caractéristique des rationnels (qui vaut 1 si x est rationnel et 0 sinon) en est un bon exemple.

Exercice 1. *m désigne un réel, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leqslant 0 \\ x^2 & si\ 0 < x < 1 \\ mx - 1 & si\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. *On choisit $m = 1$.*
   Tracez la courbe représentative de f dans un repère. La fonction f est-elle continue ?
2. *Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

2.1.3 Prolongement par continuité

Il arrive fréquemment qu'une fonction f soit définie sur un intervalle I privé d'un point a.

Si la fonction considérée admet une limite (finie) L en ce point, alors il est évident que si l'on pose $f(a) = L$, on prolonge ainsi f en une fonction continue sur I.

Exercice 2. *Montrez que la fonction $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut se prolonger par continuité en 0.*

Exercice 3. *Montrez de même que la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut se prolonger par continuité en 0.*

2.1.4 Introduction aux développements limités

Une fonction f définie sur I est continue en $a \in I$ si et seulement s'il existe une fonction ε telle que

$$f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h), \text{ et } \lim_{0} \varepsilon = 0.$$

Ainsi $f(a)$ est la meilleure approximation constante de f au voisinage de a. (Se reporter au chapitre correspondant pour de plus amples renseignements.)

2.2 Caractérisation des fonctions continues

2.2.1 Opérations sur les fonctions continues

PROPRIÉTÉ I : Les fonctions construites :
- par opérations (addition et soustraction, multiplication et division),
- par composition,

à partir de fonctions continues, sont continues sur leurs domaines de définition.

EXEMPLE 1. Les fractions rationnelles sont donc continues sur leurs domaines de définition. (Ainsi, par exemple, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus 1$.)

EXEMPLE 2. $\sqrt{x^2+1}$ est continue là où elle est définie (par composition de deux fonctions continues), c.-à-d. sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. *Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues sur $\mathbb{R}$?*

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$,
2. $g(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$,
3. $h(x) = 2 * E(x)$
4. $i(x) = \sin(2x+3)$

Exercice 5. *g est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. Cette fonction est-elle continue sur $]1;+\infty[$?*

Exercice 6. *On considère la fonction $f(x) = 2x + \sqrt{x+3}$ définie sur $[-3,+\infty[$. Y est-elle continue ?*

Exercice 7. *Soit la fonction définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-1}$$

Justifiez la continuité de f sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2.2.2 Caractérisation séquentielle d'une continuité

PROPRIÉTÉ II (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE) : Une fonction, définie sur I, est continue en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de I convergeant vers a, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

REMARQUE 5. Ce résultat est en particulier intéressant pour prouver des résultats de cours, et pour résoudre des équations fonctionnelles...

REMARQUE 6. La propriété de convergence d'une suite est donc stable par application d'une fonction continue : « l'image d'une suite convergente par une application continue, est une suite convergente ».

La propriété de Cauchy, quant à elle, n'est pas forcément sauvegardée. Il faut que la fonction ait une plus forte continuité, plus « régulière » : la *continuité uniforme*.

2.3 Propriétés des fonctions continues sur un segment

PROPRIÉTÉ III : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

REMARQUE 7. C'est-à-dire qu'elle possède (au moins) un maximum et un minimum sur ce segment.

PREUVE Ce résultat provient du fait que de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente[1]. ■

2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

2.4.1 Énoncé du théorème

PROPRIÉTÉ IV (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES[2]) : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b \in I$.
Pour tout $k \in [f(a), f(b)]$, il existe au moins un c entre a et b tel que

$$f(c) = k.$$

REMARQUE 8. Cela signifie donc que toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par la fonction (dans le segment $[a, b]$.) En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe, on peut en déduire que f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

REMARQUE 9. Le théorème des valeurs intermédiaires permet aussi de résoudre des équations de la forme $f(x) = k$.

Exercice 8. *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Démontrez que l'équation $f(x) = 8$ admet au moins une solution comprise entre 2 et 3.*

---

[1] Théorème de Bolzano-Weierstrass

REMARQUE 10. Un polynôme de degré n admet exactement n racines complexes (comptées avec leurs multiplicités). Cela signifie en particulier qu'un tel polynôme admet au plus n racines réelles.

Exercice 9. *f est la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^2 - x + 1$. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement quatre solutions.*

Exercice 10. *f est la fonction définie par $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4$.*

1. *Étudiez la limite de f en $+\infty$. En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que si $x > A$, alors $f(x) > 1$.*
2. *Étudiez la limite de f en $-\infty$. En déduire qu'il existe un réel $B < 0$ tel que si $x < B$, alors $f(x) < -1$.*
3. *Démontrez que le polynôme f admet au moins une racine comprise entre B et A et que toutes ses racines sont dans l'intervalle $[B, A]$.*

REMARQUE 11. On démontre de même que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

2.4.2 Conséquence pour les fonctions continues strictement monotones

PROPRIÉTÉ V : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre a et b, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur [a,b].

REMARQUE 12. C'est donc un résultat d'existence et d'unicité d'une solution à une équation.

REMARQUE 13. On dit dans ce cas que f réalise une bijection entre l'ensemble de départ D et celui d'arrivée A : tout y de A admet un unique antécédent $x \in D$.

Exercice 11. *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.*

1. *Étudiez le sens de variation de* f.
2. *Démontrez que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* α.
3. *Démontrez que* $1.67 < \alpha < 1.68$.

Exercice 12. f *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24$.

1. *Étudiez le sens de variation de* f.
2. *Démontrez que l'équation* $f(x) = 0$ *admet deux solutions* $\alpha < \beta$.
3. *Donnez un encadrement de* α *à* 10^{-2}.

2.5 Exercices supplémentaires

Exercice 13. f *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = |x - 1|$.

1. *Tracez la courbe représentative de* f *dans un repère.*
2. *La fonction* f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 14. m *désigne un réel, et* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ m & si\ x = 0 \end{cases}$$

Comment choisir m *pour que* f *soit continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 15. *Démontrez que l'équation* $2\sin 2x = \cos x + 1$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 16. *Démontrez que l'équation* $x^3+\dfrac{3}{2}x^2+1=0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $[-2;1]$.

Exercice 17. *Démontrez que* $\forall k \in [-1;1]$, *l'équation* $\cos x = k$ *admet une unique solution* $x_0 \in [0;\pi]$. *Donnez un encadrement au millième de* x_0 *dans le cas où* $k=-\dfrac{1}{3}$.

Exercice 18. *Un cube a une arête de* x *cm, un parallélépipède rectangle a pour dimension 1 cm, 3 cm et* $(x-1)$ *cm.*

1. *Démontrez qu'il existe une seule valeur de* x *pour laquelle les deux solides ont le même volume.*
2. *Donnez un encadrement d'amplitude* 10^{-1} *de cette valeur.*

Exercice 19. *Trouvez toutes les fonctions continues qui vérifient*

$$f(x)f(y)=f(x+y)$$

2.6 Solution des exercices du chapitre

SOLUTION 1 (EXERCICE 8). f est continue sur $[2;3]$: c'est une fonction polynôme.

D'après le TVI, pour tout k dans $[f(2);f(3)]=[5;20]$, il existe (au moins) un $c\in[2;3]$ tel que $f(c)=k$.

Il suffit donc de prendre $k=8$...

SOLUTION 2 (EXERCICE 9). On a $f(-2) = 3 \geqslant 0$, $f(-1) = -1 \leqslant 0$, $f(0) = 1 \geqslant 0$, $f(1) = -3 \leqslant 0$, et $f(3) = 43 \geqslant 0$.

Par application du TVI à chaque intervalle ($[-2; -1]$, $[-1; 0]$, etc.), on trouve (au moins) quatre solutions distinctes à $f(x) = 0$.

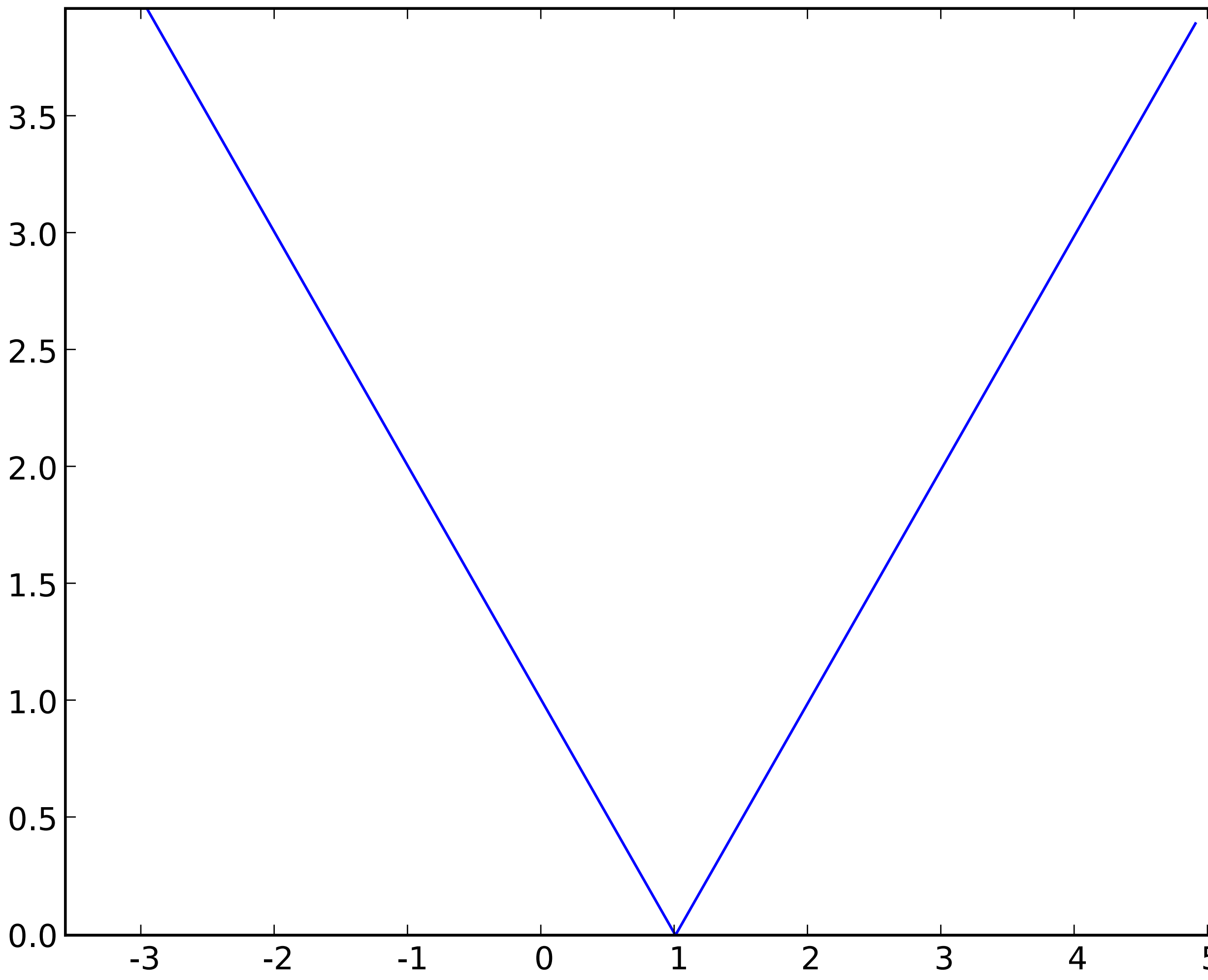
f étant une fonction polynômiale de degré 4, elle admet au plus 4 racines...

SOLUTION 3 (EXERCICE 11).

1. $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) > 0$ si et seulement si $x < 0$ ou $x > 1$. Donc f croît strictement sur $]-\infty; 0]$, décroît strictement sur $[0; 1]$, et croît strictement sur $[1; +\infty[$.
2. f croît strictement sur $]-\infty; 0]$, et $f(0) = -1$, donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle. De même, f décroît strictement sur $[0; 1]$, et $f(0) = -1$, donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

   $f(1) = -2$, $f(2) = 3$ et f est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$, donc s'annule une unique fois (en α), d'après le TVI. Enfin, pour $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 3$, donc f ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$.
3. $f(1, 67) < 0$ et $f(1, 68) > 0$.

SOLUTION 4 (EXERCICE 12).



Fin du Chapitre

Chapitre 3

Dérivation

3.1 Nombre dérivé en un point

3.1.1 Définition

DÉFINITION 1 (DÉRIVÉE EN UN POINT). *Une fonction f est dérivable en un point a si la limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. ♢

NOTATION : Cette limite est alors notée $f'(a)$, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

REMARQUE 1. La limite de la définition précédente s'écrit encore

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EXEMPLE 1. La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en 3, puisque

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$$

et on a $f'(3) = 6$.

Exercice 1. *Démontrez que les fonctions suivantes sont dérivables en a, et calculez $f'(a)$.*

1. $f(x) = 2x + 3$ *et* $a = 4$,
2. $f(x) = x^2 - x$ *et* $a = 2$.

REMARQUE 2. Il existe des fonctions continues partout et dérivables nulle part[1].

3.1.2 Interprétation graphique

Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente $T_{f,a}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, qui admet donc pour équation :

$$\boxed{T_{f,a} : y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

REMARQUE 3. Cette tangente a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *Déterminez une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ en un point a, pour*

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 2$ *et* $a = 1$,
2. $f(x) = \sqrt{4 - x}$ *en* $a = -5$,
3. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$ *en* $a = 2$.

Exercice 3. *On considère la fonction $f(x) = (x - 0,05)(x^2 - 0,3x + 0,02)$ sur $\mathbb{R}$. Combien $\mathcal{C}_f$ a-t-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?*

Exercice 4. *On considère la fonction $f(x) = x^3 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.*

1. *Déterminez les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en 0 et $\sqrt{2}$.*
2. *Étudiez la position de la courbe par rapport à chacune de ces tangentes.*

---

[1] Un premier cas de telles fonctions a été trouvé par Bolzano en 1834.

3.1.3 Introduction aux développements limités

Une fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe une fonction ε telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \text{ et } \lim_{0} \varepsilon = 0.$$

Cela signifie en particulier que $x \longmapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de a (c'est intuitivement la droite la plus proche de $\mathcal{C}_f$ à proximité de a.) Se reporter au chapitre correspondant pour de plus amples renseignements.

3.1.4 Dérivabilité et continuité

PROPRIÉTÉ I : Si une fonction est dérivable en un point a, alors elle y est continue.

PREUVE Si f est dérivable en a, alors pour tout réel h tel que $a+h \in I$ (où I est l'intervalle de définition de f), on a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

Or $\lim_{\to 0} f'(a)h = 0$ et $\lim_{\to 0} h\varepsilon(h) = 0$, donc $\lim_{\to 0} f(a+h) = f(a)$. Bref, f admet $f(a)$ pour limite en a, d'où le résultat. ■

3.2 Fonction dérivée

3.2.1 Définition d'une fonction dérivée

DÉFINITION 2 (FONCTION DÉRIVÉE). *On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorqu'elle est dérivable en tout point de I.*
La fonction qui, à tout $x \in I$ associe alors le nombre dérivé $f'(x)$ est alors appelée fonction dérivée de f. ♢

NOTATION : La fonction dérivée de f est notée f'.

EXEMPLE 2. Pour tout réel a, la fonction $f : x \mapsto x^2$ admet en a un nombre dérivé $f'(a) = 2a$. La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f' : x \mapsto 2x$.

3.2.2 Dérivées des fonctions de référence

$x \mapsto f(x)$	D_f	$x \mapsto f'(x)$	$D_{f'}$
$x \mapsto C^{te}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	x $\mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} \setminus (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$
$x \mapsto chx$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto shx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto shx$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto chx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto thx$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1-th^2x = \dfrac{1}{ch^2x}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto lnx$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto arccosx$	$[-1;1]$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$x \mapsto arcsinx$	$[-1;1]$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$x \mapsto arctanx$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

REMARQUE 4. L'exposant deux, la racine carrée et l'inverse se ramènent finalement à la fonction puissance, importante à connaître...

PROPRIÉTÉ II (DÉRIVÉE DE LA FONCTION PUISSANCE) : La dérivée de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

REMARQUE 5. Pour bien utiliser cette propriété, il faut se rappeler les résultats suivants concernant les puissances :

$$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \qquad \sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$$
$$x^a x^b = x^{a+b} \quad (x^a)^b = x^{ab}$$

3.2.3 Opérations sur les fonctions dérivées

En utilisant le tableau précédent, et les trois propriétés suivantes, on est en mesure de dériver toute fonction construite à partir de fonctions de référence.

PROPRIÉTÉ III (DÉRIVÉE D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT) : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, alors les fonctions $u+v$ et uv le sont aussi, et l'on a

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x), (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

PREUVE Se démontre simplement, en revenant à la définition du nombre dérivé. ■

Exercice 5. *Calculez la dérivée des fonctions* $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ *et* $g(x) = x^2\sqrt{x}$.

PROPRIÉTÉ IV (DÉRIVÉE D'UN QUOTIENT) : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, telles que v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable, et l'on a

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Exercice 6. *Calculez la dérivée de* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

PROPRIÉTÉ V (DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE) : Si v est une fonction dérivable sur I à valeurs dans J, et si u est une fonction dérivable sur un ensemble contenant J, alors la fonction composée uov est dérivable sur I, et l'on a

$$(uov)'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

EXEMPLE 3. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $u^n, n > 1$ aussi, et l'on a $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

EXEMPLE 4. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors $\sqrt{u}$ aussi, et l'on a $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exercice 7. *Calculez la dérivée des fonctions* $f(x) = \sqrt{4x+1}$, $g(x) = (1 + 2e^{3x+1})^4$ *et* $h(x) = sin(x^2 + 2x + 3ln(x))$.

Exercice 8. *Démontrez que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire, et réciproquement.*

3.3 Variations et extrema

3.3.1 Variations d'une fonction

Intuitivement, quand une fonction est croissante, sa tangente a une pente positive. Donc, si on cherche à connaître les variations d'une fonction, il suffit de regarder le signe de sa dérivée. C'est le sens de la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ VI : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors
- si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I,
- si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I,
- si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Exercice 9. *Étudiez les variations de la fonction* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

Exercice 10. *Faire de même avec les fonctions* $f(x) = \dfrac{sin(x)}{2+sin(x)}$ *et* $g(x) = sin^2(x) - sin(x)$ *sur* $[-\pi; \pi]$.

3.3.2 Extremum local

DÉFINITION 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$.*
- *Dire que $f(x_0)$ est un maximum local (resp. minimum local) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).*
- *Dire que $f(x_0)$ est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local.* $\diamondsuit$

Le nombre dérivé de f en un point a permet de déterminer si ce point est un extremum local, puisque dérivation et variations sont liées.

PROPRIÉTÉ VII : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f présente un extremum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.

REMARQUE 6. La réciproque de ce théorème est fausse.

Exercice 11. *Cherchez un contre exemple.*

PROPRIÉTÉ VIII : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors $f(a)$ est un extremum local de f sur I.

REMARQUE 7. Il faut savoir distinguer extremum local et global.

Exercice 12. *On considère* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{4}{x-2}$.

1. *Étudiez les variations de* f.
2. *Démontrez que 10 est un minorant de* f *sur* $]2; +infty[$.

REMARQUE 8. Une fonction peut trés bien avoir un extremum global, et n'être pas dérivable en ce point. Aussi, dans ce cas, la propriété précédente n'apporte aucun renseignement.

Exercice 13. *Cherchez une telle fonction.*

3.4 Exercices

Exercice 14. *Calculez la limite en 1 de* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}$.

Exercice 15. *Calculez la dérivée des fonctions* $f(x) = sin(x)tan(x)$, $g(x) = \dfrac{x^2 + 5x + +5}{x^2 + x + 1}$ *et* $h(x) = \dfrac{1}{3}x - 4 + \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 16. *Déterminez* $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$.

Exercice 17. *Démontrez que si* P *est un polynôme du second degré, alors on a* $P(x) = P(0) + P'(0)x + \dfrac{P''(0)}{2}x^2$.

Exercice 18. *Démontrez que les deux paraboles d'équation* $y = -x^2 + 4x - 2$ *et* $y = x^2 - 8x + 16$ *se coupent en un seul point, et vérifiez qu'en ce point elles ont une tangente commune.*

Exercice 19. *Déterminez les dimensions d'un rectangle de* $98m^2$ *qui a un périmètre minimal.*

Fin du Chapitre

Chapitre 4

Équations différentielles

4.1 Équations différentielles du premier ordre

4.1.1 Généralités

4.1.1.1 Définition

DÉFINITION 1. *Soit f une fonction de trois variables. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme*

$$f(y', y, x) = 0$$

avec y une fonction dérivable de la variable x et de dérivée y' $\diamondsuit$

4.1.2 Exemples

EXEMPLE 1. $y' = 3y$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y', y, x) = 0$ en posant

$$f \ : \ (X, Y, Z) \mapsto X - 3Y$$

EXEMPLE 2. En terminale, vous avez étudié un cas particulier d'équations différentielles : *les équations différentielles linéaires à coefficients constants* du type

$$y' = ay + b, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

4.1.2.1 Équations linéaires homogènes à coefficients constants

4.1.2.2 Équation $y' = ay$

PROPRIÉTÉ I : Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a un réel donné) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Il existe donc une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle, si on ne donne pas d'autre précision.

Exercice 1. *Résolvez* $(E_1) : 3y' + 2y = 0$.

Réponse : $(E_1) \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y$, donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$y \ : \ x \mapsto \lambda e^{-\frac{2x}{3}}$$

4.1.3 Interprétation graphique

4.1.3.1 Unicité de la solution

Pour assurer l'unicité des solutions, nous avons besoin du *théorème de* CAUCHY qui fait appel à la notion de continuité d'une fonction de plusieurs variables, donc hors de notre portée.

Par la suite nous retiendrons que si l'on peut écrire l'équation différentielle sous la forme $y' = f(x, y)$ avec f « suffisamment régulière » sur un intervalle ouvert contenant x_0, alors il existe une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$

4.1.3.2 Unicité de la solution

Exercice 2. *Résolvez* $(E_1) : 3y' + 2y = 0$, *sachant que* $y(0) = 1$.

Réponse : La fonction $f\ :\ (x,y)\mapsto -\frac{2}{3}y$ est « assez régulière » sur $\mathbb{R}$.

Nous savons déjà que les solutions sont les fonctions de la forme $y\ :\ x\mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$. Donc $y(0)=1=\lambda$, et

$$y\ :\ x\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$$

4.1.4 Équations linéaires

4.1.4.1 Définition

DÉFINITION 2. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme*

$$a(x)y'+b(x)y=f(x)$$

avec a, b et f des fonctions continues sur un même intervalle I. ♢

4.1.4.2 Équation sans second membre

DÉFINITION 3. *L'équation sans second membre associée à $a(x)y'+b(x)y=f(x)$ est*

$$a(x)y'+b(x)y=0$$ ♢

PROPRIÉTÉ II : Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y'+b(x)y=0$ sont de la forme

$$y(x)=\lambda \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$$

avec λ réel.

Exercice 3. *Résolvez les équations différentielles linéaires suivantes :*

1. $y'-y\sin x=0$,
2. $x^2y'+y=0$.

PROPRIÉTÉ III : Pour obtenir la solution générale de l'équation

$$(E)\ :\ a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

on ajoute :

- la solution générale de l'équation sans second membre,
- avec une solution particulière de (E).

4.1.4.3 Variation de la constante

Introduction à la méthode : Nous savons résoudre l'équation sans second membre. Le problème se résumera donc souvent à trouver une solution particulière.

Il existe une technique, appelée *variation de la constante*, permettant de trouver une solution particulière à partir des solutions de l'équation sans second membre...

La méthode : Si $x \mapsto \lambda\phi(x)$ est la solution générale de l'équation sans second membre, alors on peut chercher des solutions de l'équation différentielle sous la forme

$$y(x) = \lambda(x)\phi(x)$$

où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction dérivable de la variable x.

Exercice 4. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $xy' - 2y = x^3\mathrm{e}^x$, *sur* $]0, +\infty[$.
2. $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$, *sur* $]0, +\infty[$.

4.1.5 Autres exemples d'équations différentielles

4.1.5.1 Équation de Bernoulli

DÉFINITION 4. *Une équation de Bernoulli est une équation de la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = y^a f(x) \qquad \text{avec } a \neq 1 \qquad \diamondsuit$$

Une telle équation se résout en posant $z = y^{1-a}$

Exercice 5. *Résoudre l'équation différentielle* $2xy^2 - y + xy' = 0$.

4.1.5.2 Équations à variables séparables

DÉFINITION 5. *C'est une équation de la forme*

$$a(x) = y'b(y)$$

(A gauche de l'égalité, il n'y a que du x*, et à droite que du* y *: les variables peuvent être séparées).* $\diamondsuit$

On écrit l'équation sous la forme $a(x)dx = b(y)dy$ qui se résoud en passant aux primitives :

$$\int a(x)dx = \int b(y)dy$$

Exercice 6. *Résoudre* $y' = \mathrm{e}^{x+y}$.

4.2 Équations différentielles du deuxième ordre

4.2.1 Généralités

4.2.1.1 Définition

DÉFINITION 6. *Soit* f *une fonction de quatre variables. On appelle équation différentielle du deuxième ordre une équation de la forme*

$$f(y'', y', y, x) = 0$$

avec y *une fonction deux fois dérivable de la variable* x*, de dérivée première* y' *et de dérivée seconde* y''*.* $\diamondsuit$

EXEMPLE 3. $y'' = 3y' - 32y^2 + \sin x$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y'', y', y, x) = 0$ en posant

$$f\ :\ (X, Y, Z, T) \mapsto X - 3Y + 32y^2 - \sin x$$

EXEMPLE 4. En physique, on rencontre souvent de telles équations. Ainsi, pour un pendule simple on obtient l'équation

$$\theta'' = -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\theta$$

4.2.1.2 Exercice

Exercice 7. *Considérons l'équation différentielle* $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$.

1. *Montrez que la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2 + 4x + 6$ *est une solution de* (E).
2. *Montrez que* f *est la seule fonction polynômiale du second degré solution de* (E).
3. *Montrez que la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ *est une autre solution de* (E).
4. *Montrez que la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ *est aussi solution de* (E).

4.2.1.3 Équations se ramenant au premier ordre

Il faudra commencer par vérifier si l'équation différentielle ne peut pas être résolue comme une équation différentielle du premier ordre.

EXEMPLE 5 (ÉQUATIONS INCOMPLÈTES EN Y). Considérons par exemple l'équation $y'' + y' = x$.

On se ramène au premier ordre en posant $z(x) = y'(x)$.

EXEMPLE 6 (ÉQUATIONS INCOMPLÈTES EN X). Considérons, par exemple, l'équation $y'' + (y')^2 + yy' = 0$.

On pose $z(y) = y'$, alors $y'' = zz'$.

4.2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre

4.2.2.1 Définition

DÉFINITION 7. *Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre est une équation de la forme*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

avec a, b, c *et* f *des fonctions continues sur un même intervalle I.* $\diamondsuit$

4.2.2.2 Remarques

On définit, comme dans le cas du premier ordre, l'équation sans second membre.

On admettra qu'il est nécessaire et suffisant de connaître deux solutions particulières indépendantes de l'équation sans second membre pour obtenir toutes les solutions qui s'écrivent alors comme combinaison linéaire de ces deux solutions particulières.

Malheureusement, il est assez difficile de résoudre de telles équations. Nous nous contenterons donc de l'étude des équations à coefficients constants.

4.2.3 Équations linéaires à coefficients constants

4.2.3.1 Définition

DÉFINITION 8. *Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants est une équation de la forme*

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

avec a, b, c *des réels et* f *une fonction continue sur un intervalle I.* $\diamondsuit$

4.2.3.2 Équation caractéristique

DÉFINITION 9. *On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$ *l'équation d'inconnue r*

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad \diamondsuit$$

Pour la résolution de l'équation différentielle sans second membre, tout dépend du signe du discriminant...

4.2.3.3 Résolution de l'équation sans second membre

PROPRIÉTÉ IV : Soient $ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants (sans second membre), r_1 et r_2 les solutions de son équation caractéristique, et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Trois cas peuvent se produire...

$\Delta > 0$: alors $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$: alors $r_1 = r_2 = r$ et $y = e^{rx}(\lambda_1 x + \lambda_2)$

$\Delta < 0$: alors $r_{1,2} = a \pm ib$ et $y = e^{ax}(\lambda_1 \cos(bx) + \lambda_2 \sin(bx))$

Exercice 8. *Résoudre*

1. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
3. $2y'' - 5y' + 3y = 0$, *avec* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$.

4.2.4 Équation avec second membre

4.2.4.1 Résultat

Comme dans le cas du premier ordre...

PROPRIÉTÉ V : Pour obtenir la solution générale de l'équation

$$(E) \ : \ ay'' + by' + cy = f(x)$$

on ajoute la solution générale de l'équation sans second membre à une solution particulière de (E).

mais il est ici plus difficile de trouver une solution particulière, sauf dans les quelques cas particuliers suivants, qui sont à connaître.

4.2.4.2 Le second membre est une fonction polynôme

PROPRIÉTÉ VI : Si $ay''+by'+cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré
- n si a, b et c sont tous non nuls ;
- $n+1$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$;
- $n+2$ si $a \neq 0$ et $b = c = 0$.

Exercice 9. *Résoudre* $y'' - 2y' - 3y = P(x)$ *avec*

1. $P(x) = 2x^2 - 1$.
2. $P(x) = 2x^2 - x$.
3. $P(x) = 2x^2$.

4.2.4.3 $f(x)$ est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)e^{mx}$ et on obtient le théorème suivant...

PROPRIÉTÉ VII : Après changement de variable $y(x) = z(x)e^{mx}$, l'équation devient

$$az'' + (2am + b)z' + (am^2 + bm + c)z = P(x)$$

On cherche alors z sous la forme d'un polynôme de degré
- n si $am^2 + bm + c \neq 0$ (m n'est pas racine de l'équation caractéristique) ;
- $n + 1$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$;
- $n + 2$ si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b = 0$.

Exercice 10. *Résoudre* $y'' - y = 2xe^x$.

Il peut être pratique de décomposer le second membre en somme de deux fonctions simples...

PROPRIÉTÉ VIII : Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ pour tout x de I et si y_1 et y_2 sont les solutions respectivement de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et $ay'' + by' + cy = f_2(x)$,
Alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f(x)$

Cela sera surtout pratique quand le second membre sera du type $P(x)\cos(\omega x)$, cas très fréquent en physique.

Il suffira alors de revenir au dernier cas étudié en introduisant les seconds membres $P(x)e^{\mathrm{i}\omega x}$ puis $P(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}$. Il restera à faire la demi somme des solutins particulières trouvées puisque

$$\cos(\omega x) = \frac{e^{\mathrm{i}\omega x} + e^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}$$

Exercice 11. *Résoudre* $y'' + 4y = 2x\cos(2x)$.

4.3 Exercices

4.3.1 Premier ordre

Exercice 12. *Résoudre* $x^2y' + y = 1$.

Exercice 13. *Résoudre l'équation différentielle* $y' = y\tan(x) + \sin(x)$.

Exercice 14. *Chercher les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfont à l'équation fonctionnelle :* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1$.

Indications : On pourra chercher la dérivée de la fonction $x \longmapsto f(x)f(-x)$.

Exercice 15. *Intégrer l'équation différentielle :* $(x^2 - 1)y' + xy = 1$.

Exercice 16. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(x+1)y' - 2y - (x+1)^4 = 0(E)$$

1. *Déterminer les solutions de (E) sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.*
2. *Y a-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?*

4.3.2 Second ordre

Exercice 17. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$2y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

Exercice 18. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + 4y' - 5y = 2e^x$$

Exercice 19. *Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f(x)$$

Exercice 20. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$$

Exercice 21. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$2y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x}\cos 2x$$

Fin du Chapitre

Chapitre 5

Intégration

5.1 Notion de primitive

5.1.1 Définition

DÉFINITION 1. *f est une fonction définie sur un intervalle I. On appelle* primitive *de f sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f.* $\diamondsuit$

EXEMPLE 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 3$. Alors la fonction $F(x) = 2x^2 + 3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, comme la fonction $G(x) = 2x^2 + 3x$.

Exercice 1. *Montrez que la fonction $F(x) = 5x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$ est une primitive de $f(x) = 20x^3 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 2. *Déterminez une primitive de $f(x) = -\dfrac{1}{x} + 2x - \dfrac{1}{x^2}$.*

Exercice 3. *Faire de même avec $f(x) = 2xe^{-x^2+1}$.*

5.1.2 Nombre de primitives d'une fonction

PROPRIÉTÉ I : Soit f une fonction définie sur I, qui y admet une primitive F. L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

REMARQUE 1. Les primitives de f sont donc égales, à constante près.

REMARQUE 2. Si une fonction f admet une primitive sur I (ce qui n'est pas toujours assuré), alors elle en admet une infinité.

Exercice 4. *Déterminez les primitives de* $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}{4}$ *et* $g(x) = sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

REMARQUE 3. Soient $\mathcal{C}_F$ et $\mathcal{C}_G$ les courbes de deux primitives distinctes d'une fonction f, alors la seconde est l'image de la première courbe par une translation de vecteur colinéaire à l'axe des y.

PROPRIÉTÉ II : f est une fonction définie sur un intervalle I. On suppose qu'elle y admet des primitives. Soit $x_0 \in I$ et y_0 un réel donné. Alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Exercice 5. *Soit f la fonction définie sur* $]0; +\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 12x^3 - 5$. *Déterminez la primitive de* f *prenant la valeur -1 en 1.*

5.2 Calculs de primitives

5.2.1 Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par $f(x) = ...$	Les primitives de f sur I sont définies par $F(x) = ...$	L'intervalle I vaut
k (constante)	$kx + C^{te}$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C^{te}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + C^{te}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C^{te}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C^{te}$	$]0, +\infty[$
e^x	$e^x + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$sin(x)$	$-cos(x) + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x) + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$tan(x) + C^{te}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$ch(x)$	$sh(x)$	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$ch(x)$	$\mathbb{R}$
$1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$	$th(x)$	$\mathbb{R}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arccosx$	$]-1; 1[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx$	$]-1; 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctanx$	$\mathbb{R}$

REMARQUE 4. Comme précédemment, l'exposant deux, la racine carrée et l'inverse se ramènent finalement à la fonction puissance, importante à connaître...

PROPRIÉTÉ III (PRIMITIVE DE LA FONCTION PUISSANCE) : La primitive de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$.

5.2.2 Primitives et opérations sur les fonctions

Les deux propriétés suivantes permettent, en les combinant aux primitives des fonctions usuelles, de déterminer la plupart des primitives rencontrées.

PROPRIÉTÉ IV : Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors :
- $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I,
- pour tout réel k, kF est une primitive de la fonction kf sur I.

Exercice 6. *Calculez une primitive de* $f(x) = -sin(x) + 2cos(x)$.

---

fonction f	Primitives de f sur I	Conditions sur u
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C^{te}$	dépend de α
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C^{te}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}} + C^{te}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C^{te}$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{u}$	$ln(u) + C^{te}$	u strictement positive sur I
$u'e^u$	$e^u + C^{te}$	

Exercice 7. *Déterminez les primitives des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$ *sur* $\mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ *sur* $]1; +\infty[$,

3. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

5.3 Intégrales et primitives

5.3.1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

PROPRIÉTÉ V : Si f est une fonction continue sur I, et si $a \in I$, alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

5.3.2 Intégrales et primitives

PROPRIÉTÉ VI : f est une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b \in I$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

NOTATION :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Exercice 8. *Calculez*

$$\int_1^e \frac{lnx}{x} dx$$

Exercice 9. *Calculez*

$$\int_e^{e^3} \frac{1}{xlnx}dx$$

Exercice 10. *Déterminez le sens de variation de la fonction*

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

5.4 Techniques du calcul de primitives

5.4.1 Intégration par parties

PROPRIÉTÉ VII : Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, à dérivées continues. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exercice 11. *Calculez*

$$\int_0^{\pi} xsin(x)dx$$

Exercice 12. *Calculez*

$$\int_0^{ln(3)} (x-1)e^x dx$$

5.4.2 Changement de variables

PROPRIÉTÉ VIII : Soit f une fonction numérique continue sur D_f, et ϕ une fonction dérivable à dérivée continue sur un intervalle [a,b] dont l'image est contenue dans D_f. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

5.4.3 Quelques recettes

5.4.3.1 Fractions rationnelles

On décompose en éléments simples, et alors

– pour integrer $\dfrac{1}{x^2+ax+b}$, mettre le trinôme sous forme réduite : $(x+\lambda)^2-\mu^2$ puis poser $u=\dfrac{x+\lambda}{\mu}$,

– pour intégrer $\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}$, l'écrire sous la forme $\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{(2x+a)}{x^2+ax+b}+\dfrac{\beta-a\frac{\alpha}{2}}{x^2+ax+b}$, le premier terme s'intégrant en $\dfrac{\alpha}{2}ln|x^2+ax+b|+C^{te}$.

REMARQUE 5. Si la fraction $F(x)$ est impaire, on peut poser $t=x^2$ afin de simplifier le calcul.

Exercice 13. *Calculez*

$$I=\int_1^2 \frac{x^4+3x^3+x^2+1}{x^2+1}dx$$

Réponse : On fait la division euclidienne de $x^4+3x^3+x^2+1$ par x^2+1, et on trouve un quotient de x^2+3x et un reste de $-3x+1$. Donc

$$I=\int_1^2 x^2+3x+\frac{-3x+1}{x^2+1}dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_1^2+\int_1^2 \frac{-3}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}dx$$

La première fraction admet pour primitive un logarithme, la seconde une arctangente :

$$I=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+\frac{-3}{2}ln[x^2+1]+arctan(x)\right]_1^2=\dots$$

5.4.3.2 Polynômes en sin, cos

On peut toujours linéariser, mais ce n'est vraiment la peine que lorsque dans $\int sin^n x\, cos^m x dx$ les deux exposants n et m sont pairs. Sinon, les formules $sin^2 + cos^2 = 1$, $sin' = cos$ et $cos' = -sin$ permettent une intégration directe en posant $u = sin(x)$ ou $u = cos(x)$.

Exercice 14. *Calculez*

$$\int_0^\pi cos^3 x sin^2 x dx$$

Exercice 15. *Calculez*

$$\int_0^\pi cos^4 x sin^4 x dx$$

5.4.3.3 Pour $\alpha \neq 0, \int e^{\alpha x} P(x) dx$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$

Par linéarité ; il suffit de savoir calculer $F_n(x) = \int e^{\alpha x} x^n dx$, ce qui se fait à l'aide d'une intégration par parties (poser $u(x) = x^n, v'(x) = e^{\alpha x}$). Même type de méthode pour $\int cos(\alpha x) P(x) dx$ ou $\int sin(\alpha x) P(x) dx$.

Exercice 16. *Calculez*

$$\int_0^5 e^{2x}(x^2 + 3x + 5) dx$$

.

5.4.3.4 Fractions rationnelles en e^x

Poser $u = e^x$...

Exercice 17. *Calculez*

$$I = \int_0^5 \frac{e^{2x} + 3e^x + 5}{e^x + e^{-x}} dx$$

.

Réponse : On pose $u = e^x$, donc

$$\frac{e^{2x} + 3e^x + 5}{e^x + e^{-x}} = \frac{u^2 + 3u + 5}{u + \dfrac{1}{u}}$$

et $\dfrac{du}{dx} = e^x = u$, donc $dx = \dfrac{du}{u}$. D'où

$$I = \int_{e^0}^{e^5} \frac{u^2 + 3u + 5}{u + \dfrac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int_1^{e^5} \frac{u^2 + 3u + 5}{u^2 + 1} du$$

La division euclidienne de $u^2 + 3u + 5$ par $u^2 + 1$ donne un quotient de 1 et un reste de $3u + 4$.

Donc

$$I = \int_1^{e^5} 1 + \frac{3u + 4}{u^2 + 1} du$$

Soit

$$I = [u]_1^{e^5} + \int_1^{e^5} \frac{3}{2} \frac{2u}{u^2 + 1} + 4 \frac{1}{u^2 + 1} du$$

La fin du calcul ne pose aucun problème (logarithme pour l'intégrale de gauche, arctangente pour celle de droite.)

5.4.3.5 Fractions rationnelles en sin, cos : $\int F(sinx, cosx)dx$

1. Règle de Bioche : si le facteur "$F(sinx, cosx)dx$" est invariant par la transformation[1] :
   - $x \rightarrow -x$, poser $u = cos(x)$,
   - $x \rightarrow \pi - x$, poser $u = sin(x)$,
   - $x \rightarrow \pi + x$, poser $u = tan(x)$,
2. Quand on ne voit aucune invariance, poser $u = tan(\frac{x}{2})$. Alors $sin(x) = \dfrac{2u}{1 + u^2}$, $cos(x) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$, et $dx = \dfrac{2du}{1 + u^2}$: on obtient ainsi une fraction rationnelle en u (de degré généralement assez élevé).

Exercice 18. *Calculez*

$$\int_0^{\pi} \frac{sin^2x + 2cosx + 3}{sin^2x + 1} dx$$

[1] Attention, $d(-x) = -dx, d(\pi - x) = -dx, d(\pi + x) = dx$

5.4.3.6 Fractions rationnelles en $\left(x \text{ et } \sqrt{ax+b}\right)$ ou $\left(x \text{ et } \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Poser $u = \sqrt{ax+b}$ dans le premier cas, et $u = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ dans le second.

Exercice 19. *Calculez*

$$\int_3^4 \frac{2x+\sqrt{3x+1}}{x^2+x+1}dx$$

5.4.3.7 Fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}, a \neq 0$

Réduire d'abord le trinôme ax^2+bx+c sous la forme $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{1}{4a}(4ac-b^2)$, ce qui, à changement de variable du type $u = \lambda x + \mu$, le ramène aux formes : u^2+1, u^2-1 ou $1-u^2$.

- cas "u^2+1" : poser $u = shv$,
- cas "u^2-1" : poser $u = chv$, ou $u = -chv$,
- cas "$1-u^2$" : poser $u = sinv$, ou $u = \pm cosv$

Exercice 20. *Calculez*

$$\int_2^4 \frac{x^2+\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+3}dx$$

5.5 Exercices

5.5.1 Exercices corrigés

Exercice 21. *Calculez*

$$I = \int_0^{ln3} \frac{dx}{e^x+1}$$

.

Réponse : $I = ln\dfrac{3}{2}$.

PREUVE C'est une fraction rationnelle en e^x. D'après XXX, on peut poser $u = e^x$ pour se débarasser de l'exponentielle (c'est un changement de variables). Alors $\frac{du}{dx} = e^x$, donc $du = e^x dx = udx$, soit $dx = \frac{du}{u}$. En remplaçant e^x par u, et dx par $\frac{du}{u}$, et en modifiant les bornes (quand $x = 0$, $u = e^0 = 1$, et quand $x = ln(3), u = e^{ln3} = 3$), on trouve :

$$I = \int_1^3 \frac{1}{u+1}\frac{du}{u}$$

On a donc simplifié le problème : d'une fraction rationnelle en e^x, on a obtenu une simple fraction rationnelle.
Pour calculer l'intégrale de cette fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples (sous-entendu : simplement intégrables). Le degré du numérateur étant strictement plus petit que celui du dénominateur, il n'y a pas lieu de faire une division euclidienne. De plus, le dénominateur est déjà factorisé. Il nous reste à l'écrire sous la forme d'une somme d'éléments simples :

$$\frac{1}{(u+1)u} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u}$$

Soit, en mettant le terme de droite sous un seul dénominateur :

$$\frac{1}{(u+1)u} = \frac{au}{(u+1)u} + \frac{b(u+1)}{(u+1)u} = \frac{au+b(u+1)}{(u+1)u} = \frac{(a+b)u+b}{(u+1)u}$$

Par identification, on obtient le système

$$\begin{cases} a+b & = & 0 \\ b & = & 1 \end{cases}$$

Ce qui aboutit à $a = -1$ et $b = 1$. Bref, notre intégrale I s'écrit encore :

$$I = \int_1^3 \frac{-1}{u+1} + \frac{1}{u}du = [-ln|u+1| + ln|u|]_1^3 = ln\frac{3}{2}$$

Exercice 22. *Calculez*

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1+2x}dx$$

.

Réponse : $I = \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15}$.

PREUVE C'est une intégrale en x et $\sqrt{1+2x}$. D'après XXX, on peut poser $u = \sqrt{1+2x}$.
Alors $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, soit $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \dfrac{dx}{u}$, soit encore $udu = dx$. On peut donc remplacer, dans I, $\sqrt{1+2x}$ par u, et dx par udu.
Quant aux bornes, c'est simple : quand $x = 0$, $u = \sqrt{1+2*0} = 1$, et quand $x = 1$, $u = \sqrt{1+2*1} = \sqrt{3}$.
Mais il nous reste le x devant la racine : il faut l'exprimer en fonction de u pour finir notre changement de variables. $u = \sqrt{1+2x}$, donc $u^2 = 1+2x$, soit $u^2 - 1 = 2x$, ou encore $x = \dfrac{u^2-1}{2}$.
Finalement, notre intégrale vaut encore :

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2-1}{2} uudu = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} u^4 - u^2 du = ... = \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15}$$

Exercice 23. *Calculez*

$$I = \int_0^1 (x^2+x+1)e^{2x}dx$$

.

Réponse : $I = e^2 - \dfrac{1}{2}$.

PREUVE C'est une intégrale de la forme $P(x)e^{\alpha x}$. D'après XXX, on effectue des intégrations par parties, jusqu'à ce que le polynôme "disparaisse" :

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^1 (x^2+x+1)e^{2x}dx &= \left[(x^2+x+1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \textstyle\int_0^1 (2x+1)\frac{e^{2x}}{2}dx \\
&= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\left[(2x+1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \textstyle\int_0^1 2\frac{e^{2x}}{2}dx\right) \\
&= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1\right) \\
&= ... = e^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 24. *Calculez*

$$I = \int_0^1 \frac{Arctan(x)}{1+x^2}dx$$

.

Réponse : $I = \frac{\pi^2}{32}$.

PREUVE Cette fois-ci, rien ne correspond dans XXX. Deux possibilités :

– C'est une forme simple, que l'on peut directement primitiver,
– C'est une forme très compliquée ; il faut se battre avec des changements de variables non évidents, ou des intégrations par parties.

En IUT, bien sûr, le deuxième cas n'arrive jamais (à moins que le prof ait mal recopié l'énoncé, on n'a pas vérifié la faisabilité de l'exercice, ce qui n'arrive pas en partiel).

Donc, on cherche de quelle forme peut bien être $\frac{Arctan(x)}{1+x^2}$. L'une des rares choses que l'on a à connaître sur l'arc tangente, c'est sa dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. La fonction dans l'intégrale est donc de la forme $u'(x)u(x)$, avec $u(x) = Arctan(x)$.

$u'u$ est de la forme $u'u^\alpha$, avec $\alpha = 1$, donc admet une primitive de la forme $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. (c.f. la partie 5.2.2) Ainsi :

$$I = \left[\frac{Arctan(x)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{Arctan(1)^2}{2} - \frac{Arctan(0)^2}{2}$$

Enfin, $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, donc l'arc dont la tangente vaut 1 est $\frac{\pi}{4}$: $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. De même, $tan(0) = 0$, donc l'arc dont la tangente vaut 0 est 0 : $arctan(0) = 0$.

Le résultat final est donc $I = \frac{\pi^2}{32}$. ■

Exercice 25. *Calculez*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 x sin^5 x dx$$

.

Réponse : $I = \frac{1}{24}$.

PREUVE Cette fois-ci, c'est un produit de sinus et cosinus, et la partie XXX nous dit comment faire. On est dans le cas facile où au moins une des deux puissances est impaire. L'idée est de choisir la plus petite des puissances impaires (le 3), de l'écrire (cette puissance) 1+le reste (ici 1+2), et de remplacer ce qu'il y a sous "le reste" en utilisant la formule $cos^2 x = 1 - sin^2 x$, ou $sin^2 x = 1 - cos^2 x$... pour récupérer des termes de la forme $u'u^\alpha$, avec $u = sin$ ou $u = cos$ selon le cas. Ainsi, dans notre exemple,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3x\ sin^5xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\ cos^2x\ sin^5xdx$$

donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\ (1 - sin^2x)\ sin^5xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\ sin^5xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\ sin^7xdx$$

... de la forme $u'u^5$ pour la première intégrale, et $u'u^7$ pour la suivante. Donc

$$I = \left[\frac{sin^6x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{sin^8x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 26. *Calculez*

$$I = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

.

Réponse : $I = \dfrac{ln3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

PREUVE On est dans le cas d'une fraction rationnelle. Le numérateur ayant un degré strictement plus petit que le dénominateur, on n'a pas à faire de division euclidienne. De plus, le discriminant du dénominateur étant négatif, on ne peut pas plus le factoriser. Il ne reste plus qu'à passer à la dernière étape : écrire cette fraction sous la forme d'une somme d'éléments simples.
La section XXX nous donne la marche à suivre : on reconnaît presque une fraction de la forme $\dfrac{u'}{u}$, que l'on sait intégrer (la primitive est $ln|u|$, c.f. le tableau de la section primitives). On fait donc clairement apparaître la dérivée du dénominateur (XXX XXX $2x + 1$), et on récupère une seconde fraction :

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

Pour la première fraction, la primitive est $ln|x^2 + x + 1|$. La section XXX nous dit que la seconde fraction est quasiment la dérivée d'un arc tangente (on rappelle que

$arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$). Puisqu'il nous faut un carré au dénominateur (en suivant les indications), on le fait apparaître :

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Ensuite, dans la dérivée de l'arc tangente, c'est pas $\frac{3}{4}$ que l'on a au dénominateur, mais 1 :

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

On a réussi à faire apparaître la forme générale d'une dérivée d'une arc tangente. On a tout pour calculer notre intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$I = \left[\frac{1}{2}ln|x^2+x+1|\right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}} \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$$

$$I = \frac{ln3}{2} + \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$$

Il reste à faire le changement de variable $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ pour retrouver la dérivée de $arctan(u)$ (et alors $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$) :

$$I = \frac{ln3}{2} + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}du$$

Et finalement :

$$I = \frac{ln3}{2} + \sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}du = \frac{ln3}{2} + \sqrt{3}\,[arctan(u)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{ln3}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

... puisque $tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, et $tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, donc $arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$. ■

Exercice 27. *Calculez*

$$I = \int_0^1 \frac{3x+4}{x^2+4x+5}dx$$

Réponse : $I = \frac{ln3}{2}\left(ln(2) - \frac{4}{3}\left(Arctan(3) - Arctan(2)\right)\right)$

PREUVE On procède exactement comme précédemment :

$$I = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2+4x+5}dx = \frac{3}{2}\left(\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \int_0^1 \frac{-\frac{4}{3}}{x^2+4x+5}dx\right)$$

$$I = \frac{3}{2}\left(\left[ln(x^2+4x+5)\right]_0^1 - \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2+1}dx\right)$$

$$I = \frac{3}{2}\left(ln(10) - ln(5) - \frac{4}{3}\int_2^3 \frac{du}{u^2+1}\right) = \frac{3}{2}\left(ln(10) - ln(5) - \frac{4}{3}\left[Arctan(u)\right]_2^3\right)$$

Exercice 28. *Calculez*

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x}cos(2x)dx$$

Réponse : $I = \frac{1-e^{-2\pi}}{5}$

PREUVE Cet exercice est un peu astucieux, mais cette astuce peut marcher dans certains cas : faire deux intégrations par parties, pour obtenir I dans les deux parties de l'égalité.

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x}cos(2x)dx = \left[-e^{-x}cos(2x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(-e^{-x})(-2sin(2x))dx$$

$$I = -e^{-2\pi} + 1 - 2\int_0^{2\pi} e^{-x}sin(2x)dx$$

Puis, une deuxième intégration par parties nous redonne I :

$$I = -e^{-2\pi} + 1 - 2\left(\left[-e^{-x}sin(2x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(-e^{-x})(2cos(2x))dx\right)$$

$$I = 1 - e^{-2\pi} - 2\left(2\int_0^{2\pi} e^{-x}cos(2x)dx\right) = 1 - e^{-2\pi} - 4I$$

Donc $5I = 1 - e^{-2\pi}$, d'où la valeur de I. ∎

5.5.2 Exercices avec indications

Exercice 29. *Calculez*

$$I = \int_1^2 \frac{8x^2 - 13x + 10}{x^2(x^2 - 4x + 5)}dx$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{8x^2 - 13x + 10}{x^2(x^2 - 4x + 5)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx + d}{x^2 - 4x + 5}$$

Les deux premiers termes s'intègrent facilement, le troisième se décompose en un logarithme et un arctangente (voir exo. 26).

On trouve au final $-\frac{ln(2)}{2} + \pi + 1 - ln(2)$.

Exercice 30. *Calculez*

$$\int_0^{2*\pi} \frac{cos\ x}{2 - cos^2 x}dx$$

On utilise les règles de Bioche (poser u=sin(x)), pour trouver $I = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 31. *Calculez*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x - 6)^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{\alpha}{x - 3} + \frac{\beta}{(x - 3)^2} + \frac{\gamma}{x + 2} + \frac{\delta}{(x + 2)^2}$$

Le premier et le troisième terme se primitivent en log, les deux autres sont de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Au final, on obtient :

$$I = \frac{4ln\left(\frac{3}{2}\right)}{125} + \frac{1}{75}$$

Exercice 32. *Calculez*

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 ln(1+x^2)dx$$

On fait une intégration par parties (en dérivant le log). On récupère une fraction rationnelle, que l'on décompose en éléments simples (ne pas oublier de faire la division euclidienne). Il apparaît alors la dérivée de l'arc tangente.
Tout calcul fait, $I = \sqrt{3}ln(4) - \dfrac{2\pi}{9}$.

Exercice 33. *Calculez*

$$\int_0^1 x\ Arctan(x)dx$$

On effectue une intégration par parties (dérivation de l'arc tangente). On récupère une fraction rationnelle, que l'on décompose en éléments simples (en fait, seule la division euclidienne est nécessaire : on récupère aussitôt des termes dont on connaît les primitives.)
Au final, $I = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.

Exercice 34. *Calculez*

$$\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)}dx$$

On décompose en éléments simples (pas de division à faire) :

$$\frac{x-2}{(2x-3)^2} = \frac{\alpha}{2x-3} + \frac{\beta}{(2x-3)^2}$$

Au final, on trouve $I = -\dfrac{ln(3)}{4} - \dfrac{1}{6}$.

Exercice 35. *Calculez*

$$\int_0^{ln2} \frac{e^x}{e^{2x}+2}dx$$

Fraction rationnelle en e^x : changement de variable $u = e^x$. On récupère alors la dérivée d'un arc tangente.
Valeur de l'intégrale : $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}atan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}atan(\sqrt{2})$

Exercice 36. *Calculez*
$$I = \int_0^1 x^3 e^x dx$$

Trois intégrations par parties, pour trouver finalement $6 - 2e$.

Exercice 37. *Calcul de*
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - sin^2 x}{sin^4 x} cosx\, dx$$

Règles de Bioche : on pose $u = sin(x)$, et on obtient au final $I = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 38. *Calcul de*
$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tan^3 x} dx$$

On reconnaît directement une forme $\frac{u'}{u}$, et on trouve $I = -ln(\sqrt{3}) + \frac{4}{3}$.

Exercice 39. *Calculez*
$$\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

On pose $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, pour récupérer une fraction rationnelle, que l'on intègre. L'intégrale vaut $-4atan(2) + \frac{3\pi}{2} + ln(\frac{3}{2})$.

Exercice 40. *Calcul de*
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{10} x\, cos^3 x\, dx$$

On trouve $\frac{63\pi}{512} + \frac{2}{3}$.

Exercice 41. *Calcul de*

$$I = \int_{ln2}^{ln5} \frac{e^x}{(e^x+3)\sqrt{e^x-1}}\, dx$$

Diverses méthodes pour aboutir au résultat : $atan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - atan\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 42. *Calculez*

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$$

Méthode déjà détaillée... On fait apparaître le début d'un carré au dénominateur : $-x^2+2x+3 = -(x-1)^2+4$ puis, après avoir sorti le 4 de la racine, on peut effectuer le changement de variable $u = \frac{x-1}{4}$, pour se ramener à $\sqrt{1-u^2}$ au dénominateur. On pose alors t=Arccos(u) (ou u=cos(t)), pour obtenir au final une intégrale toute simple. Résultat : $I = -4 * atan(\sqrt{3}+2) + 2 * pi$.

Exercice 43. *Calcul de*

$$I = \int_{-1}^{1} (1+x)\sqrt{1+x^2} dx$$

Diverses méthodes possibles, comme de poser x=cos(t). Valeur de l'intégrale : $I = -(ln(\sqrt{2}-1))/2 - (ln(\sqrt{2}+1))/-2 + \sqrt{2}$.

Fin du Chapitre

Chapitre 6

Comparaison de suites et de fonctions

6.1 Fonctions négligeables et équivalentes

6.1.1 Fonctions négligeables

Soient f et g deux fonctions réelles, et a un réel ou un infini.

DÉFINITION 1 (FONCTIONS NÉGLIGEABLES). *f est dite négligeable par rapport à g au voisinage de a lorsque*

$$\lim_a \frac{f}{g} = 0$$

. ♢

NOTATION : On le note $f \underset{a}{=} o(g)$.

PROPRIÉTÉ I : On peut le voir encore sous la forme de l'existence d'une fonction ε définie sur un voisinage V du point a, qui tend vers 0 en a, et qui est telle que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x), \forall x \in V$$

EXEMPLE 1. $f \underset{a}{=} o(1)$ signifie que f tend vers 0 en a.

EXEMPLE 2. La fonction nulle est négligeable devant toute fonction.

EXEMPLE 3. Si f est bornée et g tend vers $+\infty$, alors $f \underset{a}{=} o(g)$.

PROPRIÉTÉ II : On a les propriétés suivantes

1. x^m est négligeable devant x^n en $+\infty$ dès que m est plus petit que n
2. $ln^m(x) \underset{+\infty}{=} o(ln^n(x))$ et $e^{mx} \underset{+\infty}{=} o(e^{nx})$ pour $m < n$.
3. $ln^m(x) \underset{+\infty}{=} o(x^n)$ et $x^m \underset{+\infty}{=} o(e^{nx})$ pour tout m et n.

PROPRIÉTÉ III (TRANSITIVITÉ) : Si f est négligeable devant g et g devant h (au voisinage d'un point a), alors f est négligeable devant h (la loi o est transitive).

PROPRIÉTÉ IV (MULTIPLICATION, ADDITION) : On a le droit de multiplier des o :

$$f \underset{+\infty}{=} o(g) \Rightarrow fh \underset{+\infty}{=} o(gh)$$
$$f \underset{+\infty}{=} o(g), h \underset{+\infty}{=} o(k) \Rightarrow fh \underset{+\infty}{=} o(gk)$$

...mais attention, on n'a pas le droit de les additionner.

Exercice 1. *Trouvez un contrexemple.*

6.1.2 Fonctions équivalentes

DÉFINITION 2 (FONCTIONS ÉQUIVALENTES). *f est dite équivalente à g au voisinage d'un point a lorsque le quotient de ces deux fonctions tend vers 1 quand x tend vers a.*

$$\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{a} \frac{f}{g} = 1}$$

. ♢

REMARQUE 1. Cela signifie que $f - g \underset{a}{=} o(g)$

PROPRIÉTÉ V (RELATION D'ÉQUIVALENCE) : L'équivalence $\sim$ de deux fonctions en a est une relation d'équivalence : elle est

1. réflexive : pour toute fonction f, $f \underset{a}{\sim} f$,
2. symétrique : pour toutes fonctions f et g, $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$,
3. transitive : pour toutes fonctions f, g et h, $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$,

PROPRIÉTÉ VI : Si deux fonctions sont équivalentes en un point, alors elles ont même limite en ce point.

PROPRIÉTÉ VII (PRODUIT, QUOTIENT, PUISSANCE) : On peut multiplier, quotienter et élever à la puissance des équivalents.

REMARQUE 2. Par contre, on n'a en général pas le droit de sommer des équivalents.

Exercice 2. *Trouvez un contre exemple.*

PROPRIÉTÉ VIII : Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors leurs primitives nulles en a sont équivalentes (au voisinage de a) :

$$\int_x^a f(t)dt \underset{a}{\sim} \int_x^a g(t)dt$$

REMARQUE 3. Un résultat existe pour la dérivation, qui peut aider à calculer des équivalents :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

6.2 Développements limités

6.2.1 Introduction

6.2.2 Développements limités d'ordre n en x_0

Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$, et I un intervalle le contenant (ou l'ayant pour borne).

DÉFINITION 3. *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un développements limités d'ordre n en x_0 (noté $DL_n(x_0)$) s'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}^n[x]$ et une fonction ε définie sur I, tels que*

$$\boxed{f(x) = P_n(x-x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

P_n est alors appelé la partie régulière du développement limité, et $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ le reste d'ordre n, que l'on note encore $o((x-x_0)^n)$. ♢

EXEMPLE 4. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : &]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

On vérifie aisément que

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \frac{x}{1-x}$$

donc f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, de partie régulière $P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ et de reste $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$ (qui tend bien vers 0 en 0.)

PROPRIÉTÉ IX : Si f admet un développement limité en x_0, alors f admet une limite en x_0 (égale à $P_n(0)$), et

- si $x_0 \notin I$, alors f est prolongeable par continuité en x_0,
- si $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0,
- si $x_0 \in I$, et $n > 1$ alors f est dérivable en x_0.

REMARQUE 4. On ne peut pas étendre le résultat précédent : f peut avoir un développement limité d'ordre 2000 sans être deux fois dérivables.

6.2.3 Conditions d'existence et d'unicité du DL

PROPRIÉTÉ X (TRONCATURE) : Si f admet un $DL_n(x_0)$, de partie régulière P_n alors f admet un $DL_m(x_0)$ pour tout $m \geqslant n$, dont la partie régulière est obtenue en prenant les termes de degré inférieur ou égal à m de P_n.

PROPRIÉTÉ XI (UNICITÉ DU DL) : Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors il est unique : P_n et ε sont uniques.

REMARQUE 5. Si f est paire par rapport au point x_0 ($f(x_0+t) = f(x_0-t), \forall t$), alors la partie régulière P_n est paire.

PROPRIÉTÉ XII (EXISTENCE : THÉORÈME DE TAYLOR-YOUNG) : Si $f^{(n)}(x_0)$ existe, alors f admet un $DL_n(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Il existe une version plus forte de ce théorème d'existence :

PROPRIÉTÉ XIII (EXISTENCE : THÉORÈME DE TAYLOR-LAGRANGE) : Si f est $n+1$ fois dérivable sur $[x_0, x]$, alors f possède un $DL_n(x_0)$ de partie régulière

$$P(X) = f(x_0) + f'(x_0)X + \frac{f''(x_0)}{2}X^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}X^n$$

avec le reste donné dans l'expression suivante

$$f(x) = P(x - x_0) + \frac{f^{(n)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ où } c \in [x_0, x]$$

EXEMPLE 5 (FORMULE DE MAC LAURIN). C'est le cas particulier du théorème précédent où $x_0 = 0$. On obtient alors

$$\exists \theta \in [0, 1], f(x) = f(0) + f'(0)x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

6.2.4 Développements limités des fonctions usuelles

Avec la formule de Taylor, on obtient les développements limités des fonctions usuelles en 0, qui sont à connaître :

EXEMPLE 6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

EXEMPLE 7. $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

EXEMPLE 8. $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

EXEMPLE 9. $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

EXEMPLE 10. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$

EXEMPLE 11. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

EXEMPLE 12. Pour les fonctions ch et sh, on utilise la formule

$$ch(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \text{ et } sh(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

...pour trouver les mêmes développements que sin et cos, mais avec partout des signes +.

6.3 Cas des suites

6.4 Exercices

Exercice 3. *Comparez, au voisinage de $+\infty$, les fonctions*

$$x \longmapsto \sqrt{x}, x \longmapsto \ln x, x \longmapsto \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}, x \longmapsto \exp\sqrt{\ln x}$$

Exercice 4. *Donnez un équivalent simple, au voisinage de 1, de* $\operatorname{Arccos} x$.

Fin du Chapitre

Chapitre 7

Limite d'une fonction

Ce chapitre est principalement de la révision : il sera complété par celui intitulé Comparaison de fonctions.

7.1 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

7.1.1 Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$

DÉFINITION 1 (LIMITE D'UNE FONCTION : VERSION INTUITIVE). *f admet une limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque tout intervalle ouvert contenant l, contient aussi tous les $f(x)$ pour x grand (resp. proche de $-\infty$.)* ♢

REMARQUE 1. On remarquera la similitude avec la limite d'une suite en $+\infty$.

Exercice 1. *En utilisant cette définition, démontrez que la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2. *En utilisant cette définition, après simplification, déterminez la limite de la fonction*

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$$

DÉFINITION 2 (ASYMPTOTE HORIZONTALE). *Dans ce cas, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = l$ est dite asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f.* ♢

REMARQUE 2. Ainsi, plus l'on se rapproche de $+\infty$, plus la courbe $\mathcal{C}$ est proche de $\mathcal{D}$.

Exercice 3. *Reprendre les exercices 1 et 2 en déterminant les éventuelles asymptotes horizontales.*

7.1.2 Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$, asymptotes

DÉFINITION 3. *f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x grand.* ♢

DÉFINITION 4 (ASYMPTOTE OBLIQUE). *La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentant f lorsque*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

REMARQUE 3. On a des énoncés équivalents, *mutatis mutandis*, en $-\infty$.

Exercice 4. *Démontrez que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction*

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$$

admet une asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 5. *Faire de même avec la fonction*

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 4}{2x + 4}$$

7.2 Limite infinie d'une fonction en un réel quelconque

7.2.1 Limite infinie en un point de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 5 (LIMITE INFINIE EN UN POINT DE $\mathbb{R}$). *f admet pour limite $+\infty$ en un réel a lorsque tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x voisin de a.* ♢

DÉFINITION 6 (ASYMPTOTE VERTICALE). *Dans ce cas, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$ est dite asymptote verticale en a à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f.* ♢

EXEMPLE 1.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

Exercice 6. *En utilisant la définition, montrez que*

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

tend vers $+\infty$ en 1.

7.2.2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 7 (LIMITE FINIE EN UN POINT DE $\mathbb{R}$). *f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en un réel a lorsque tout intervalle de la forme $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x voisin de a.* ♢

7.3 Définition rigoureuse et propriétés générales liées à la notion de limite

Toutes les définitions précédentes se répètent : elles expriment à chaque fois le fait que quand x se rapproche d'une valeur (éventuellement infinie), alors $f(x)$ se rapproche elle aussi d'une valeur (éventuellement infinie). On peut résumer tout cela dans une définition générale de convergence...

7.3.1 Définition rigoureuse

DÉFINITION 8 (LIMITE D'UNE FONCTION). *Soient* x_0 *et* l *deux éléments de* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ *(on n'exige pas que* $x_0 \in D_{\mathrm{f}}$*.)*
On dit que f *a pour limite* l *en* x_0 *si pour tout voisinage* W *de* l*, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que*

$$\forall x \in D_{\mathrm{f}}, x \in \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{f}(x) \in \mathrm{W}$$

REMARQUE 4. Il existe une définition topologique à la notion de voisinage, que l'on ne donnera pas ici.

7.3.2 Propriétés

PROPRIÉTÉ I (UNICITÉ DE LA LIMITE) : Si une fonction admet une limite en un point donné, cette limite est unique.

REMARQUE 5. Ce point permet notamment d'utiliser sans ambiguité la notation, précédemment utilisée, résumant le fait que l est la limite de f en x_0.

NOTATION (LIMITE D'UNE SUITE) :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

7.4 Détermination d'une limite

7.4.1 Théorème des gendarmes

PROPRIÉTÉ II (THÉORÈME DES GENDARMES) : Soient f, g et h des fonctions, et $l \in \mathbb{R}$. Si

- $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour x assez grand,
- g et h ont même limite l en $+\infty$,

alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Exercice 7. *Calculez les limites en $+/-\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par*

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$

Exercice 8. *Calculez les limites en 1 et $+\infty$ de la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par*

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$$

Exercice 9. *Calculez les limites en $+/-\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \frac{3x^2 - \cos x}{x^2+1}$$

7.4.2 Comparaison de fonctions

PROPRIÉTÉ III : Si $g(x) \leqslant f(x)$ et g tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, alors f tend aussi vers $+\infty$.

7.5 Exercices

Exercice 10. *Calculez les limites en 1 et $+\infty$ de la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par*

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1 + (x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 11. *Calculez la limite en 0 de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$$

Exercice 12. *Etudiez la limite aux infinis de*

$$f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$$

Exercice 13. *Calculez la limite en* $\frac{\pi}{4}$ *de la fonction définie sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *par :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1}$$

Fin du Chapitre

Chapitre 8

Annales

8.1 Octobre 2006

QUESTION 1 : On considère la suite $u_n = \dfrac{n+3}{n-2}$.

1. *Cette suite est définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. u_n *est une suite convergente.*
3. u_n *tend vers* $-\dfrac{3}{2}$.
4. *Cette suite est supérieure à 1 quand* $n > 3$.
5. u_n *est décroissante à partir du rang 3.*

QUESTION 2 : Prolongement par continuité.

1. $\dfrac{\cos(x)}{x}$ *est prolongeable par continuité en 0.*
2. *Si* f *est prolongeable par continuité en un point, alors elle y admet une limite à droite finie.*
3. *Si* f *est prolongeable par continuité en un point, alors elle est dérivable en ce point.*
4. *Si* f *est dérivable en un point, alors elle est prolongeable par continuité en ce point.*
5. *La fonction* $\dfrac{\sin 2x}{2x}$ *est prolongeable par continuité en 0.*

QUESTION 3 : Convergence d'une suite.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ *converge vers 1.*
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + 2n}$ *converge vers 1.*
3. $u_n = q^n$ *converge seulement si* $-1 < q < 1$.
4. $u_n = u_{n-1} + 4$ *converge.*
5. $u_n = \dfrac{1}{2} u_{n-1}$ *converge.*

QUESTION 4 : Séries numériques.

1. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{1024} = \dfrac{1023}{1024}$.
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ *converge vers 2.*
3. *Soit* $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$, *avec* (u_n) *suite arithmétique. Alors* S_n *converge.*
4. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$ *converge.*
5. $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$ *diverge si* $q \leqslant 1$.

QUESTION 5 : Dérivation.

1. *La fonction* $E(x)$ *(partie entière de* x*) est dérivable si* $x \in]1, 2[$.
2. *La fonction* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *est dérivable si* $x \neq 0$.
3. *La fonction* $f(x) = \sqrt{x - 1}$ *est dérivable en* $x = 1$.
4. *La fonction* $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2 + 1}$ *est dérivable pour* $x \leqslant 0$.
5. *La fonction* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

QUESTION 6 : Soit $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

1. *L'équation* $f(x) = 0$ *admet trois solutions réelles.*

2. *$f(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 1$.*
3. *f est décroissante sur $[-1, \frac{1}{3}$.*
4. *f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.*
5. *f admet un minimum et un maximum locaux.*

QUESTION 7 : Monotonie et périodicité.

1. *Une fonction croissante est positive.*
2. *Une fonction décroissante admet un minimum local.*
3. *Si la dérivée d'une fonction s'annule en un point, alors cette fonction y admet soit un maximum local, soit un minimum local.*
4. *La dérivée d'une fonction paire est impaire.*
5. *La dérivée d'une fonction périodique est périodique de même période.*

QUESTION 8 : Une définition de la convergence d'une suite u_n vers l est...

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$,
2. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$,
3. $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$,
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$,
5. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_N - l| < \varepsilon$.

QUESTION 9 : La suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...

1. *est définie par $u_0 = u_1 = 1,$ et $u_n = u_{n+1} + u_{n+2}$,*
2. *tend vers le nombre d'or ϕ,*
3. *est telle que le quotient de deux termes successifs est constant,*
4. *admet pour premiers termes 1 ;1 ;2 ;3 ;5 ;8,*
5. *peut se mettre sous la forme $u_n = f(n)$.*

QUESTION 10 : $v_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 4}$...

1. *est une suite croissante,*
2. *est une suite convergente,*
3. *est une suite arithmético-géométrique,*
4. *vérifie* $v_6 > v_5$*,*
5. *est toujours positive.*

QUESTION 11 : Croissance et convergence de suites...

1. *la suite* u *définie par* $u_n = 0,9999^n$ *est divergente,*
2. *si, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, u_n < \dfrac{1}{n^2}$*, alors la suite converge vers 0,*
3. *si* u *est une suite strictement croissante, alors la limite de* u *est* $+\infty$*,*
4. *si* u *est non majorée, alors elle converge vers* $+\infty$*,*
5. *la suite* $u_n = -3n^2 + 5$ *converge vers -3.*

QUESTION 12 : Limites de fonctions...

1. $f(x) = -x^3 + 2x - 5$ *tend vers* $-\infty$ *en* $+\infty$*,*
2. *si* $f(x) \to +\infty$ *en* $+\infty$*, alors* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ *en* $+\infty$*,*
3. *si* $f(x) \to +\infty$ *en* $+\infty$*, alors* $f(x)g(x) \to +\infty$ *en* $+\infty$*,*
4. $f(x) = cos(x) - x$ *n'a pas de limite en* $+\infty$*,*
5. $\dfrac{sin(x)}{x}$ *tend vers 1 en* $+\infty$*.*

QUESTION 13 : Sur les séries numériques...

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ *tend vers* $\dfrac{6}{\pi^2}$*,*
2. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k}$ *tend vers* $+\infty$*,*
3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n}$ *tend vers* 1*,*
4. *une somme infinie de termes strictement positifs, est infinie,*
5. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + ... + \dfrac{1}{n!}$ *tend vers* 0*.*

QUESTION 14 : Continuité de fonctions...

1. *la fonction partie entière est continue sur* $[2, 3]$,
2. *la fonction* $f(x) = |x - 2|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
3. *la fonction* $\frac{sin(x)}{x}$ *si* $x \neq 0$, *et 1 sinon, est continue sur* $\mathbb{R}$,
4. *la fonction partie entière est continue à gauche sur* $[2, 3]$,
5. *la fonction* $f(x) = cos(2x + 3)$ *est continue en* $\frac{\pi}{6}$.

QUESTION 15 : Monotonie et majoration...

1. *si une suite est majorée par 3, alors elle ne l'est pas par 2,*
2. *la suite définie par* $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1$, *est monotone,*
3. *une suite croissante de premier terme positif a tous ses termes positifs,*
4. *toute suite monotone majorée est convergente,*
5. *toute suite tendant vers* $+\infty$ *est croissante à partir d'un certain rang.*

QUESTION 16 : Suites adjacentes...

1. *les suites* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ *sont adjacentes,*
2. *les suites* $u_n = 5 - n$ *et* $v_n = 5 + n$ *sont adjacentes,*
3. *les suites* $u_n = n$ *et* $v_n = n - \frac{1}{n}$ *sont adjacentes,*
4. *les suites de Cauchy sont toutes adjacentes entre-elles,*
5. *si deux suites convergent vers la même limite, alors ces suites sont adjacentes.*

QUESTION 17 : Prolongement par continuité...

1. *la fonction* $xcos\left(\frac{1}{x}\right)$ *est prolongeable par continuité en 0,*
2. *la fonction partie entière est prolongeable par continuité en 1,*
3. *la fonction* $\frac{sin(x)}{x}$ *est prolongeable par continuité en 0,*

4. *la fonction* $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *est prolongeable par continuité en 0,*
5. *si une fonction est prolongeable par continuité en un point, alors elle y admet une limite finie.*

QUESTION 18 : Définition d'une limite...

1. *une autre manière d'écrire que* $f(x)$ *tend vers* l *en* $+\infty$ *est* $\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < A$,
2. *dire que* f *a pour limite* l *en* x_0 *revient à dire que pour tout voisinage* W *de* l, *il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* $\forall x \in D_{\mathrm{f}}, x \in \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{f}(x) \in \mathrm{W}$,
3. *on dit qu'une fonction admet une asymptote oblique lorsque sa courbe représentative coïncide avec une droite d'équation* $y = ax + b$ *pour* x *grand,*
4. *une autre manière de dire que* $f(x)$ *tend vers* 0 *en* $+\infty$ *est* $\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x > x_0 \Rightarrow |f(x)| < A$,
5. *une autre manière de dire que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *en* x_0 *est* $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha, |f(x)| > A$.

QUESTION 19 : Somme de termes...

1. $\dfrac{1}{81} + \dfrac{1}{243} + \ldots + \dfrac{1}{19683} = \dfrac{2336}{31534}$,
2. $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} + \ldots + \dfrac{1}{9765625} = \dfrac{2}{5}$,
3. $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 256 = 512$,
4. *la somme des inverses des carrés est une somme de termes en progression géométrique,*
5. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

QUESTION 20 : Monotonie d'une suite...

1. $u_n = n^3 - 2n^2 + 3$ *est croissante (au moins à partir d'un certain rang),*
2. $u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}...\dfrac{n}{n+1}$ *est croissante (au moins à partir d'un certain rang),*
3. $u_n = 2n + sin(n)$ *est croissante (au moins à partir d'un certain rang),*

4. $u_n = n^2 e^{-n}$ *est croissante (au moins à partir d'un certain rang),*
5. $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ *définir une suite croissante (au moins à partir d'un certain rang).*

QUESTION 21 : Calcul de limites...

1. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} - 1 + (x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ *tend vers 1 en* $+\infty$*,*
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ *tend vers 0 en 0,*
3. $f(x) = x + \dfrac{\sin(x)}{x}$ *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$*,*
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1}$ *tend vers* $+\infty$ *en* $\dfrac{\pi}{4}$*,*
5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 4}{2x + 4}$ *admet* $y = 2x + 3$ *pour assymptote oblique.*

QUESTION 22 : Sur la continuité...

1. *si une fonction est continue à droite et à gauche en* a*, alors elle est continue en* a*,*
2. *si une fonction est continue en* a*, alors son taux d'accroissement admet une limite finie en* a*,*
3. *il n'existe pas de fonction nulle part continue,*
4. *une fonction* f *est continue en* a *si et seulement s'il existe une fonction* ε *telle que* $f(a+h) = f(a) + h\varepsilon(h)$*, et* $\lim_0 \varepsilon = 0.$*,*
5. *si* f *est continue en* a*, alors* $f(a)$ *est la meilleure approximation constante de* f *au voisinage de* a*.*

QUESTION 23 : Encore de la continuité...

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *est continue là où elle est définie,*
2. *les fractions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition,*
3. *la dérivée d'une fonction continue est continue,*
4. $f(x) = xE(x^2)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*,*

5. *les fonctions polynômiales sont toujours continues sur* $\mathbb{R}$.

QUESTION 24 : Convergence de suites (toujours)...

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *converge vers 0,*
2. $v_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ *tend vers 1,*
3. $w_n = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k!$ *tend vers* $+\infty$*,*
4. $u_0 = 3, u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$ *n'admet pas de limite finie,*
5. $u_n = sin(n)$ *tend vers 0.*

QUESTION 25 : Techniques d'étude des suites...

1. *soit* $u_{n+1} = au_n + b$*, alors* $u_n + \dfrac{b}{a+1}$ *est une suite géométrique,*
2. *si* $u_{n+1} = qu_n$*, alors* $u_n = u_0 q^{n+1}$*,*
3. *si* $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$*, et si l'équation* $r^2 + ar + b = 0$ *admet deux solutions distinctes* r_1 *et* r_2*, alors* u_n *est de la forme* $C_1 r_1 + C_2 r_2$
4. *si* $u_{n+1} = u_n + a$*, alors* $u_n = an$*,*
5. *en appliquant le logarithme ou l'exponentielle, on peut toujours ramener une suite donnée à une suite arithmétique ou géométrique.*

QUESTION 26 : Continue ou non...

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ *est continue sur* $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$,
2. $g(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*,*
3. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$*,*
4. $f(x) = 2x + \sqrt{x+3}$ *est continue sur* $[-3, +\infty[$,
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x-1}$ *est continue sur* $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

QUESTION 27 : Quelques définitions pour finir...

1. *dire qu'une suite u admet pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang,*
2. *dire qu'une suite u a pour limite $l \in \mathbb{R}$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang,*
3. *dire qu'une suite est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$,*
4. *dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand,*
5. *dire qu'une fonction f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.*

8.2 Janvier 2007

QUESTION 28 : La suite $u_n = \dfrac{4^n}{(2n)!}$ est monotone.

Faux

QUESTION 29 : Si $|u_{n+1} - u_n|$ tend vers 0, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Faux

QUESTION 30 : $v_n = 2,4 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!} - \dfrac{sin(n)}{n}$ tend vers 2,4.

Vrai

QUESTION 31 : La suite $u_n = (n+3)^3$ tend vers $+\infty$.

Vrai

QUESTION 32 : La suite $u_n = -2\sqrt{n + \frac{1}{n}} + 3$ tend vers 0.

Faux

QUESTION 33 : La suite $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ tend vers $+\infty$.

Faux

QUESTION 34 : $u_n = \frac{n^2 + 2n - 2}{n^2 + 3sin(n)}$ tend vers 1.

Vrai

QUESTION 35 : $u_n = \sqrt{2n} - n^2 + n$ tend vers $+\infty$.

Faux

QUESTION 36 : Les suites

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

Faux

QUESTION 37 : $u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{(u_2 + u_n)n}{2}$

Faux

QUESTION 38 : $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$.

Vrai

QUESTION 39 : La suite

$$u_n = \frac{3(0,2)^n - 1}{(0,2)^n + 4}$$

converge.

Vrai

QUESTION 40 : $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 512 = 1023$

Vrai

QUESTION 41 : La suite définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = u_n + u_n^2$ est géométrique.

Faux

QUESTION 42 : La suite $u_n = \dfrac{ln(n)}{n}$ est monotone.

Faux

QUESTION 43 : La fonction

$$f(x) = \frac{x}{10x + 3}$$

tend vers 0 en $+\infty$.

Faux

QUESTION 44 : La limite de la fonction $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x + 2ln(x)}$ est 3.

Faux

QUESTION 45 : La courbe représentant la fonction

$$f(x) = \frac{2x-3}{4x-1}$$

admet une asymptote oblique en $+\infty$.

Faux

QUESTION 46 :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3ln(x)}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

Vrai

QUESTION 47 : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3x^2 - \cos x}{x^2 + 1}$$

tend vers 3 en $+\infty$.

Vrai

QUESTION 48 : La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{-\sin x}}{x}$$

tend vers 0 en $+\infty$.

Vrai

QUESTION 49 : $\dfrac{\sin(x)}{x}$ tend vers 1 en 0.

Vrai

QUESTION 50 : La fonction $f(x) = x \cos \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut se prolonger par continuité en 0.

Vrai

QUESTION 51 : $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Faux

QUESTION 52 : La fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ est continue sur $]1; +\infty[$.

Vrai

QUESTION 53 : La fonction $f(x) = 2x + \sqrt{x+3}$ définie sur $[-3, +\infty[$ y est continue.

Vrai

QUESTION 54 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 14x - 15$. Alors l'équation $f(x) = 8$ admet au moins une solution comprise entre 2 et 3.

Faux

QUESTION 55 : f est la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^2 + 1$. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement quatre solutions.

Faux

QUESTION 56 : L'équation $2 \sin x = \cos 2x + 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Faux

QUESTION 57 : La fonction $f(x) = \sqrt{x} + x$ est dérivable en 0.

Faux

QUESTION 58 : La courbe d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 2$ admet $y = 2x + 3$ comme tangente en 1.

Faux

QUESTION 59 : La fonction $f(x) = (x - 0,5)(x^2 - 0,3x + 2)$ sur $\mathbb{R}$ admet 2 tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

Faux

QUESTION 60 : La courbe de la fonction $f(x) = x^3 - 6x + 1$ est constamment sous ses tangentes.

Faux

QUESTION 61 : La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

Vrai

QUESTION 62 : La dérivée de la fonction $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ est $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

Vrai

QUESTION 63 : La dérivée de $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ est $\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Vrai

QUESTION 64 : La fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Faux

QUESTION 65 : 10 est un minorant de $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{4}{x-2}$ sur $]2; +\infty[$.

Faux

QUESTION 66 : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x}-2}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{2}}$ tend vers 1 en 1.

Faux

QUESTION 67 :

$$\int_0^{ln3} \frac{dx}{e^x+1} = ln(3/2)$$

.

Vrai

QUESTION 68 :

$$\int_1^2 (x^2+x+1)e^{2x}dx = (5e^4)/2 - (e^2)$$

.

Vrai

QUESTION 69 :

$$\int_1^3 \frac{Arctan(x)}{1+x^2}dx = (\pi^2/254)$$

.

Faux

QUESTION 70 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4x\ sin^5xdx = 1/48$$

.

Faux

QUESTION 71 :

$$\int_1^2 \frac{x^2-13x+10}{x^2(x^2-4x+5)}dx = -((\ln(2))/2)-((3\pi)/4)+1-(\ln(2))$$

Vrai

QUESTION 72 :

$$\int_0^{\pi} \frac{cos\ x}{2-cos^2x}dx = 0$$

Vrai

QUESTION 73 :

$$\int_0^{2\sqrt{3}} x^3ln(1+x^2)dx = \sqrt{4}ln(5)+\frac{4\pi}{27}$$

Faux

QUESTION 74 :

$$\int_1^3 x^2\ Arctan(x)dx = 9\text{atan}(3)-\pi/12+(\ln(5))/6+(-4)/3$$

Vrai

QUESTION 75 :

$$\int_0^2 \frac{x-1}{(2x-3)}dx = 4/23$$

Faux

QUESTION 76 :

$$\int_0^2 x^3 e^{2x} dx = (17e^4)/8 + 3/8$$

Vrai

QUESTION 77 :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - sin^2 x}{sin^4 x} cosx\ dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Faux

QUESTION 78 :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{2*\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tan^3 x} dx = -ln(\sqrt{3}) + 8/3$$

Faux

QUESTION 79 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6 x\ cos^3 x\ dx = 2/63$$

Vrai

QUESTION 80 :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+2)\sqrt{e^x-1}}\ dx = \frac{1}{2}$$

Faux

QUESTION 81 :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx = -((\ln(2))/2) + \ln(\sqrt{3}+1)$$

Vrai

8.3 Octobre 2007

Dire, pour chacune des assertions suivantes, si elle est vraie ou fausse (+1 pour une bonne réponse, -1 pour une mauvaise).

QUESTION 82 : On considère la suite $u_n = \frac{n+3}{n-2}$.

1. *Cette suite est définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. u_n *est une suite convergente.*
3. u_n *tend vers* $-\frac{3}{2}$.
4. *Cette suite est supérieure à 1 quand* $n > 3$.
5. u_n *est décroissante à partir du rang 3.*

QUESTION 83 : Prolongement par continuité.

1. $\frac{\cos(x)}{x}$ *est prolongeable par continuité en 0.*
2. *Si* f *est prolongeable par continuité en un point, alors elle y admet une limite à droite finie.*
3. *Si* f *est prolongeable par continuité en un point, alors elle est dérivable en ce point.*
4. *Si* f *est dérivable en un point, alors elle est prolongeable par continuité en ce point.*
5. *La fonction* $\frac{\sin 2x}{2x}$ *est prolongeable par continuité en 0.*

QUESTION 84 : Convergence d'une suite.

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$ *converge vers 1.*
2. $u_n = \frac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+2n}$ *converge vers 1.*
3. $u_n = q^n$ *converge seulement si* $-1 < q < 1$.
4. $u_n = u_{n-1} + 4$ *converge.*
5. $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}$ *converge.*

QUESTION 85 : Séries numériques.

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$.
2. $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$ *converge vers 2.*
3. *Soit* $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$, *avec* (u_n) *suite arithmétique. Alors* S_n *converge.*
4. $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ *converge.*
5. $S_n=\sum_{i=1}^{n}q^i$ *diverge si* $q\leqslant 1$.

QUESTION 86 : Dérivation.

1. *La fonction* $E(x)$ *(partie entière de* x*) est dérivable si* $x\in]1,2[$.
2. *La fonction* $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ *est dérivable si* $x\neq 0$.
3. *La fonction* $f(x)=\sqrt{x-1}$ *est dérivable en* $x=1$.
4. *La fonction* $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+1}$ *est dérivable pour* $x\leqslant 0$.
5. *La fonction* $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

QUESTION 87 : Soit $f(x)=x^3+x^2-x-1$.

1. *L'équation* $f(x)=0$ *admet trois solutions réelles.*
2. $f(x)\leqslant 0$ *si* $x\leqslant 1$.
3. f *est décroissante sur* $[-1,\frac{1}{3}]$.
4. f *n'est pas bornée sur* $\mathbb{R}$.
5. f *admet un minimum et un maximum locaux.*

QUESTION 88 : Monotonie et périodicité.

1. *Une fonction croissante est positive.*

2. *Une fonction décroissante admet un minimum local.*
3. *Si la dérivée d'une fonction s'annule en un point, alors cette fonction y admet soit un maximum local, soit un minimum local.*
4. *La dérivée d'une fonction paire est impaire.*
5. *La dérivée d'une fonction périodique est périodique de même période.*

QUESTION 89 : $v_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n+4}$...

1. *est une suite croissante,*
2. *est une suite convergente,*
3. *est une suite géométrique,*
4. *vérifie* $v_6 > v_5$,
5. *est toujours positive.*

QUESTION 90 : Croissance et convergence de suites...

1. *la suite* u *définie par* $u_n = (-0,9999)^n$ *est divergente,*
2. *si, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, |u_n| < \dfrac{1}{n^2}$, *alors la suite converge vers 0,*
3. *si* u *est une suite strictement décroissante, alors la limite de* u *est* $-\infty$,
4. *Si la suite* u *n'est pas majorée, alors elle est minorée,*
5. *la suite* $u_n = -3\dfrac{1}{n^2} + 5$ *converge vers -3.*

QUESTION 91 : Monotonie et majoration...

1. *si une suite est majorée par 2, alors elle ne l'est pas par 3,*
2. *la suite définie par* $u_0 = 1, u_{n+1} = \dfrac{4}{3}u_n$, *est monotone,*
3. *une suite croissante de premier terme positif a tous ses termes positifs,*
4. *toute suite monotone majorée est convergente,*
5. *toute suite tendant vers* $+\infty$ *est croissante à partir d'un certain rang.*

QUESTION 92 : Suites adjacentes...

1. *les suites* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ *et* $v_n = u_n - 4\dfrac{1}{n}$ *sont adjacentes,*
2. *les suites* $u_n = exp(5-n)$ *et* $v_n = exp(5+n)$ *sont adjacentes,*
3. *les suites* $u_n = n$ *et* $v_n = n - \dfrac{1}{n}$ *sont adjacentes,*
4. *les suites convergentes sont toutes adjacentes entre-elles,*
5. *si deux suites sont adjacentes, alors elles ont la même limite.*

QUESTION 93 : La suite $u_n = \dfrac{4^n}{(2n)!}$.

1. *est monotone,*
2. *est positive,*
3. *tend vers 0,*
4. *est constituée d'entiers pairs uniquement,*
5. *est de Cauchy.*

QUESTION 94 : f est la fonction polynômiale définie par $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

1. *L'équation* $f(x) = 0$ *admet exactement quatre solutions.*
2. f *est définie sur* $\mathbb{R}$*,*
3. $f'(x) = 4x^3 + 2$*,*
4. $f''(x) = 12x^2 + 2$*,*
5. f *est croissante sur [1,3].*

QUESTION 95 : La fonction $f(x) = \sqrt{x} + x$

1. *est dérivable en 0.*
2. *admet, sur* $\mathbb{R}_+$*, pour dérivée* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$*,*
3. *admet, pour dérivée seconde,* $f''(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$*,*
4. *est strictement croissante,*
5. *n'est pas continue en 0.*

QUESTION 96 : Vrai ou faux ?

1. *La fonction* $f(x) = (x - 0,5)(x^2 - 0,3x + 2)$ *sur* $\mathbb{R}$ *admet 2 tangentes parallèles à l'axe des abscisses.*
2. *La courbe d'équation* $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 2$ *admet* $y = 2x + 3$ *comme tangente en 1.*
3. *La courbe de la fonction* $f(x) = x^3 - 6x + 1$ *est constamment sous ses tangentes.*
4. *10 est un minorant de* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{4}{x-2}$ *sur* $]2; +\infty[$.
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x} - 2}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{2}}$ *tend vers 1 en 1.*

QUESTION 97 : Les intégrales...

1. $\int_0^{ln3} \dfrac{dx}{e^x + 1} = ln(3/2)$.
2. $\int_1^2 (x^2 + x + 1)e^{2x} dx = (5e^4)/2 - (e^2)$.
3. $\int_1^3 \dfrac{Arctan(x)}{1+x^2} dx = (\pi^2/254)$.
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x \; sin^5 x dx = 1/48$.
5. $\int_1^2 \dfrac{x^2 - 13x + 10}{x^2(x^2 - 4x + 5)} dx = -((\ln(2))/2) - ((3\pi)/4) + 1 - (\ln(2))$

$\boxed{\text{Fin du Chapitre}}$

Index