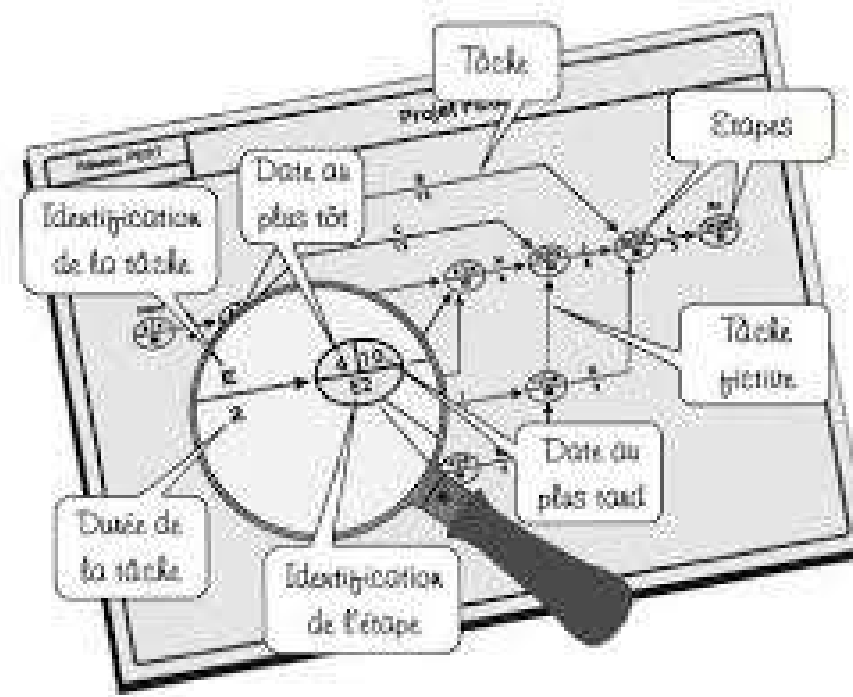


Ordonnancement

Méthode PERT



Marie-Ange MANIER

Extrait du cours MANIER M.-A. « Ordonnancement »
(module GP85, Formation d'ingénieurs en logistique par alternance, UTBM, printemps 2021)

I Introduction

I.1 Contexte: la gestion de projets

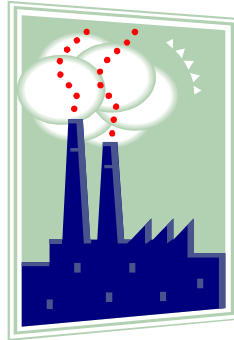
Projet

ouvrage **unitaire** composé d'un grand nombre de tâches interdépendantes, soumises à des contraintes diverses :
techniques, sociales, commerciales, financières, ...

Ordonnancement de projet

déterminer un ordre d'exécution des tâches et des dates d'exécution, en respectant les contraintes imposées

- **USA** (début années 30) puis **Europe** (post 2nde guerre mondiale)
- **origine** : problèmes posés par la réalisation d'installations industrielles (grande taille, complexité, pluridisciplinarité)



MAIS



Projets dans l'Égypte Ancienne !!!



- * mise en œuvre de techniques novatrices (manutention de charges lourdes,...)
- * réunion de compétences depuis la conception jusqu'à la fin des travaux
- * rigoureuse orchestration de toutes les disciplines

Concept de
gestion de projet
(project management)

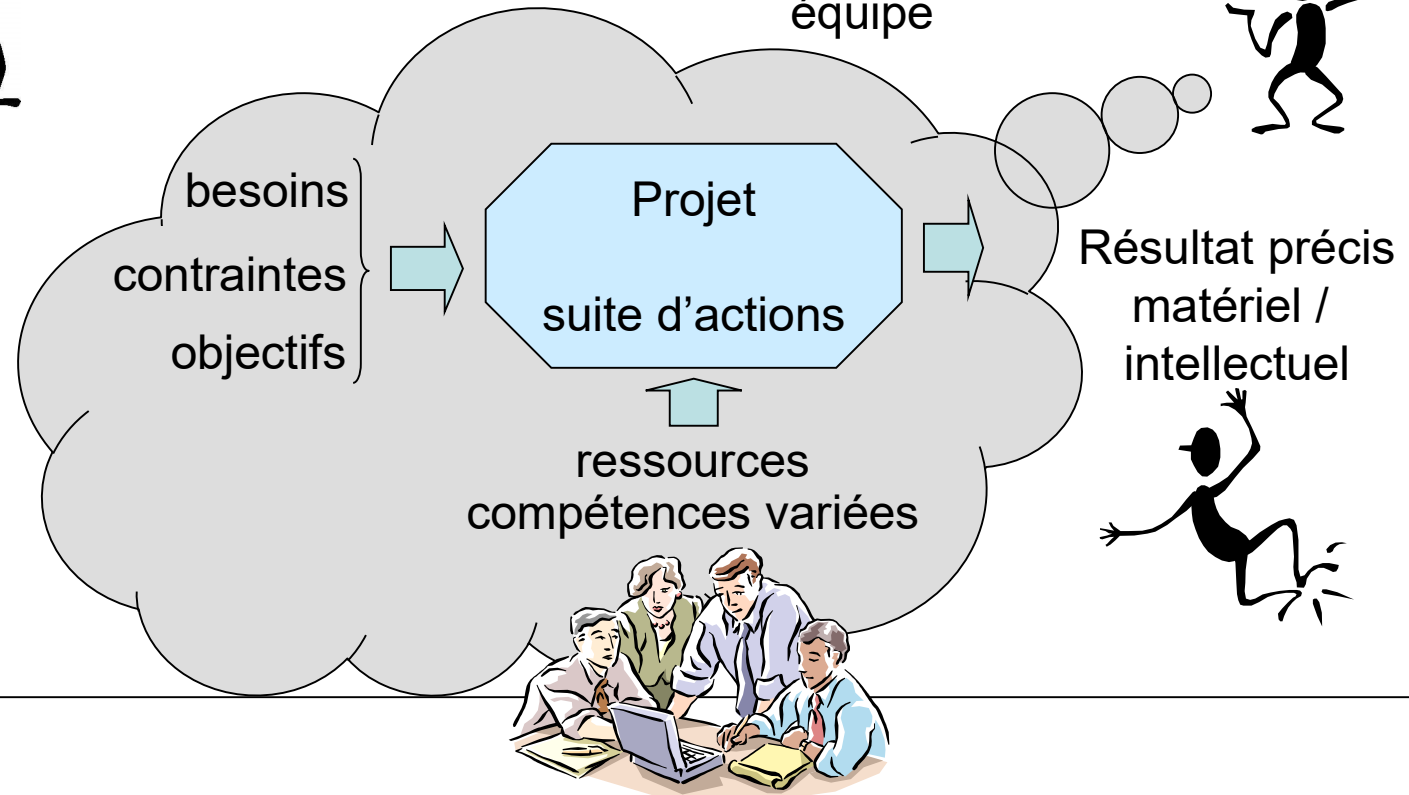
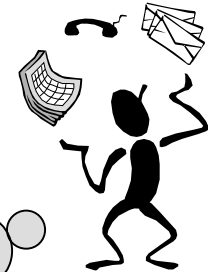
Qu'est-ce qu'un projet ?

AFNOR : une démarche spécifique
 ↓
 structurer méthodiquement et progressivement une réalité à venir



Maîtrise d'ouvrage
 utilisateur, client, acheteur

Maîtrise d'œuvre
 chef de projet
 équipe



Caractéristiques d'un projet

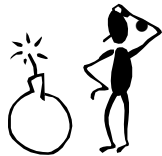


- action ponctuelle, unique, non répétitive, novatrice



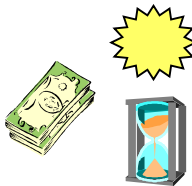
limitée dans le temps :

date de début, date de fin, **planification**



qui comporte une part de risques

estimation



est contrainte par des **objectifs** :- **qualité**

- **coûts**

- **délais**



mobilise des compétences complémentaires (travail d'équipe)

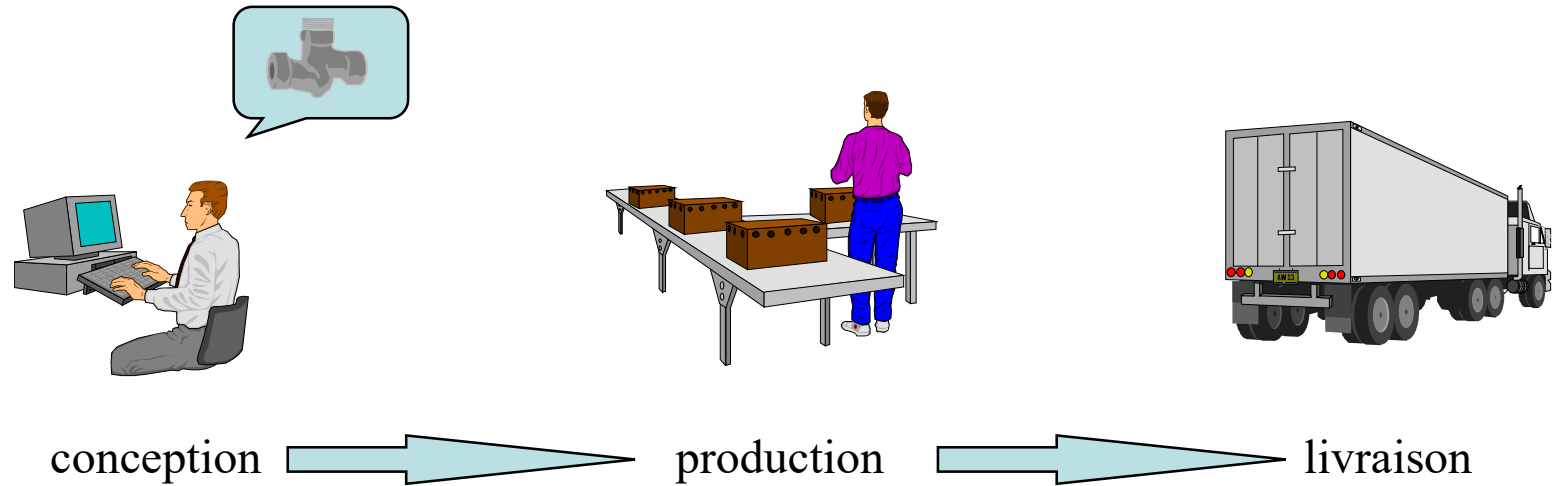


doit faire l'objet d'un suivi et d'un pilotage rigoureux

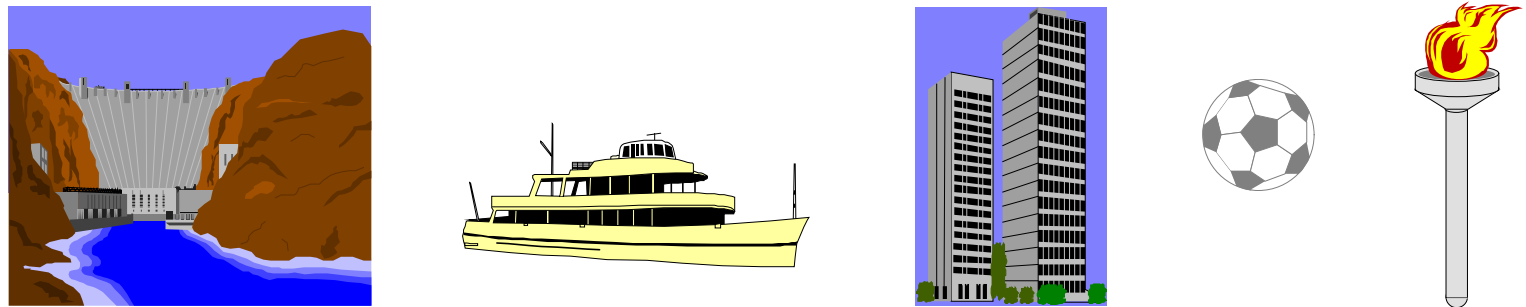
(étapes, jalons, points de contrôle)

Projet : exemples d'application

- domaine industriel



- autres



- domaine informatique



- Développement d'une nouvelle application informatique
- Evolution d'une application (décision interne / réglementation)
- Réalisation d'un outil de communication externe ou interne
- Définition/mise en place d'une nouvelle organisation du travail
- Acquisition/mise en place d'un outil, de matériel (besoins spécifiques)...
- **Une procédure**
- **Une activité permanente de l'entreprise**
- **Le produit attendu**

**ne sont pas
des projets**

Planification de projet

=

réalisation chronologique des actions suivantes:

- découper le projet en activités élémentaires
- identifier les contraintes
- modéliser l'enchaînement des activités
- évaluer les durées
- établir la planification
- déterminer les latitudes d'action
- optimiser la planification

**ordonnancement
de projet**

I Introduction

I.2 Définitions

* **Ordonnancement de projet :**

Déterminer un **ordre d'exécution** des tâches qui ont été identifiées et des **dates** d'exécution en respectant les **contraintes** imposées

* **Les données d'un problème d'ordonnancement**

- tâches

- ressources

- contraintes : * temporelles (délai, contraintes d'enchaînement,...)
* sur l'utilisation et la disponibilité des **ressources**.

- le ou les objectifs

*relations liant
tâches et ressources*

Les objectifs : résoudre un problème d'ordonnancement, c'est trouver, parmi l'ensemble des solutions, celle qui optimise un ou plusieurs critères

=> **ORDONNANCEMENT OPTIMAL**

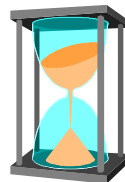
Critères à minimiser en ordonnancement de projet :



durée totale d'exécution du projet



coût d'exécution du projet



ET



Exemple: réalisation d'un support, constituant un des éléments du projet Mididanse.

Tableau des tâches à effectuer et de leurs contraintes d'antériorité:

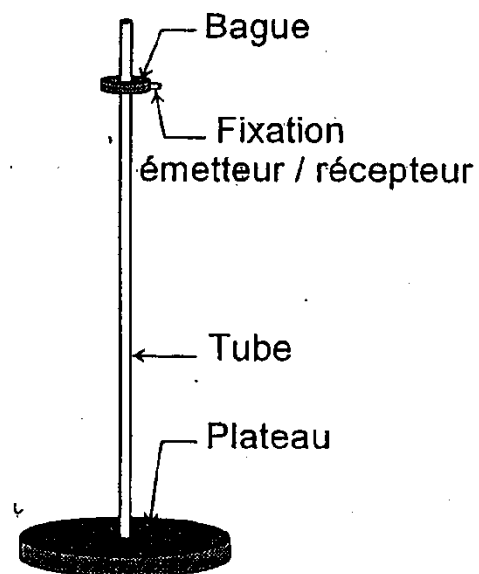


Figure – Support pour émetteur / récepteur infrarouge

activités	code	activités antérieures
concevoir le support	E	début
approvisionner la matière	N	E
découper les tubes	O	N
usiner les bagues	P	N
sous-traiter la découpe des plateaux	Q	N
usiner les tubes	R	O
usiner les plateaux	S	Q
anodiser	T	R, P, S
assembler	Y	T

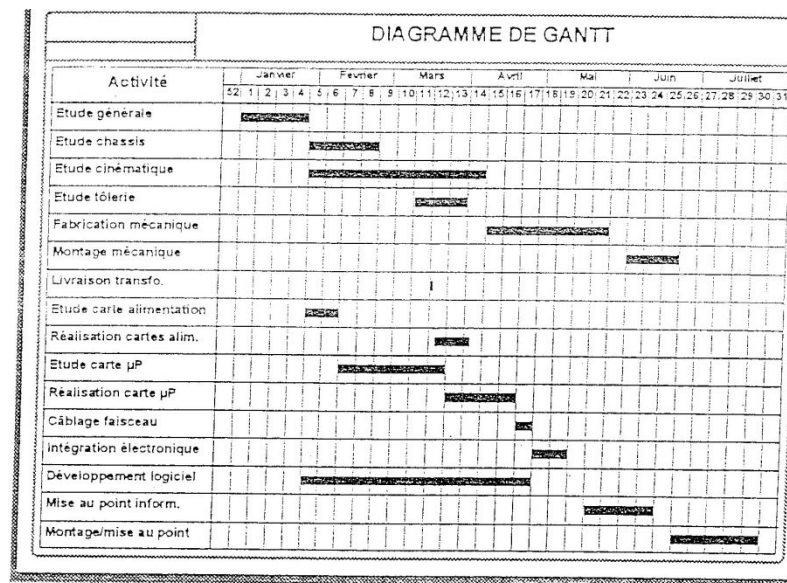
Exemple: projet Mididanse

Sous ensemble	Activité	Code	Durée	Antériorité
Conception générale		A	1j	Début
Carte processeur	Conception	B	7j	A
« «	Commande composants	F	10j	B
« «	Etude circuit imprimé	G	3j	B
« «	Réalisation circuit imprimé	H	2j	G
« «	Câblage	U	2j	F,H
« «	Programmation	V	3j	U
« «	Mise au point	W	1j	V
Procédé infrarouge	Conception	C	7j	A
« «	Commande composants	I	9j	C
« «	Dessin circuit imprimé	J	5j	C
« «	Câblage / mise au point	K	5j	I,J
Procédé HF	Conception	D	7j	A
« «	Dessin circuit imprimé	L	3j	D
« «	Câblage	M	5j	M L
« «	Mise au point / contrôles	X	3j	X M
Supports	Concevoir le support	E	5j	A
« «	Approvisionner matière	N	10j	E
« «	Découper les tubes	O	1j	N
« «	Usiner les bagues	P	2j	N
« «	Sous-traiter la découpe des plateaux	Q	5j	N
« «	Usiner les tubes	R	1j	O
« «	Usiner les plateaux	S	3j	Q
« «	Anodiser	T	5j	R,P,S
« «	Assembler	Y	1j	T
Intégration		Z	3j	K,W,X,Y

I.3 Méthodes

* Jusqu'en 1957: **diagramme de GANTT**

Construction: tenir compte à la fois de la durée et des dates d'exécution (contraintes potentielles), et des ressources (contraintes disjonctives et cumulatives)



- ⇒ complexe pour plus de 30 tâches
- ⇒ inconvénient majeur : toute modification du planning implique de reconstruire totalement le graphique
- ⇒ limitation du nombre de mises à jour

I.3 Méthodes

* Quelques algorithmes de résolution disponibles pour les problèmes d'ordonnancement (exe: algorithme de Johnson)

MAIS

Cas particuliers (2 ou 3 postes successifs)

* Méthodes non adaptées au cas de fabrications

- non répétitives
- très complexes
- grand nombre de données, à spécifications très diverses
- nature des exigences associées: technologique, financière, sociale, climatique, commerciale, internationale....

=> Nécessite une **coordination** poussée de l'ensemble des moyens à mettre en oeuvre

* 1958: méthodes fondées sur la **Théorie des Graphes**

USA

P.E.R.T. : Program Evaluation and Review Technic

Créateur : armée USA

Application : Projet militaire : fusées Polaris

Résultats : durée du projet : 5 ans au lieu de 7

France

M.P.M. : Méthode des Potentiels Metra

Créateur : Bernard Roy : thèse de Mathématiques
Appliquées

Application : Construction du paquebot France

GB

C.P.M. : Critical Method Path

Créateur : Cie anglaise d'électricité

Application : vérification des usines électriques

Résultats : Gain de temps de 30%

Objectifs:

- établir la suite des tâches d'un projet et de représenter **graphiquement** l'enchaînement de ces tâches (**contraintes potentielles**)
- d 'abord*
- déterminer le **meilleur temps total** nécessaire à la réalisation de l'objectif
 - déterminer les **tâches critiques**, celles dont l'exécution ne peut être retardée ni ralentie, sans que la fin du projet ne soit décalée du temps correspondant.
- puis*
- **évaluer** les moyens à mettre en oeuvre
 - connaître les **conséquences** du changement de durée d'une tâche du projet.
- enfin*
- obtenir le plus **bas coût** possible
(aménagement de certaines tâches)
 - **raccourcir** le programme initial au **moindre coût**
(raccourcir le temps d'exécution de certaines tâches).

II La méthode PERT

Version initiale du PERT : on ne tient compte que des **contraintes potentielles**
(pas des contraintes de ressources)

PERT = graphe potentiels-événements
graphe potentiels-étapes

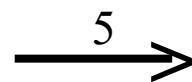
II.1 Définitions et conventions

PERT : graphe **orienté** dont les **sommets** représentant des étapes dans le déroulement du projet
et dont les **arcs** sont associés aux tâches à effectuer



étape ou évènement
=
début ou fin d'une tâche

(10 : identificateur)

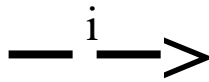


tâche (opération)
valeur de l'arc
= durée de la tâche

Etape: de durée nulle
=> **ne coûte rien**

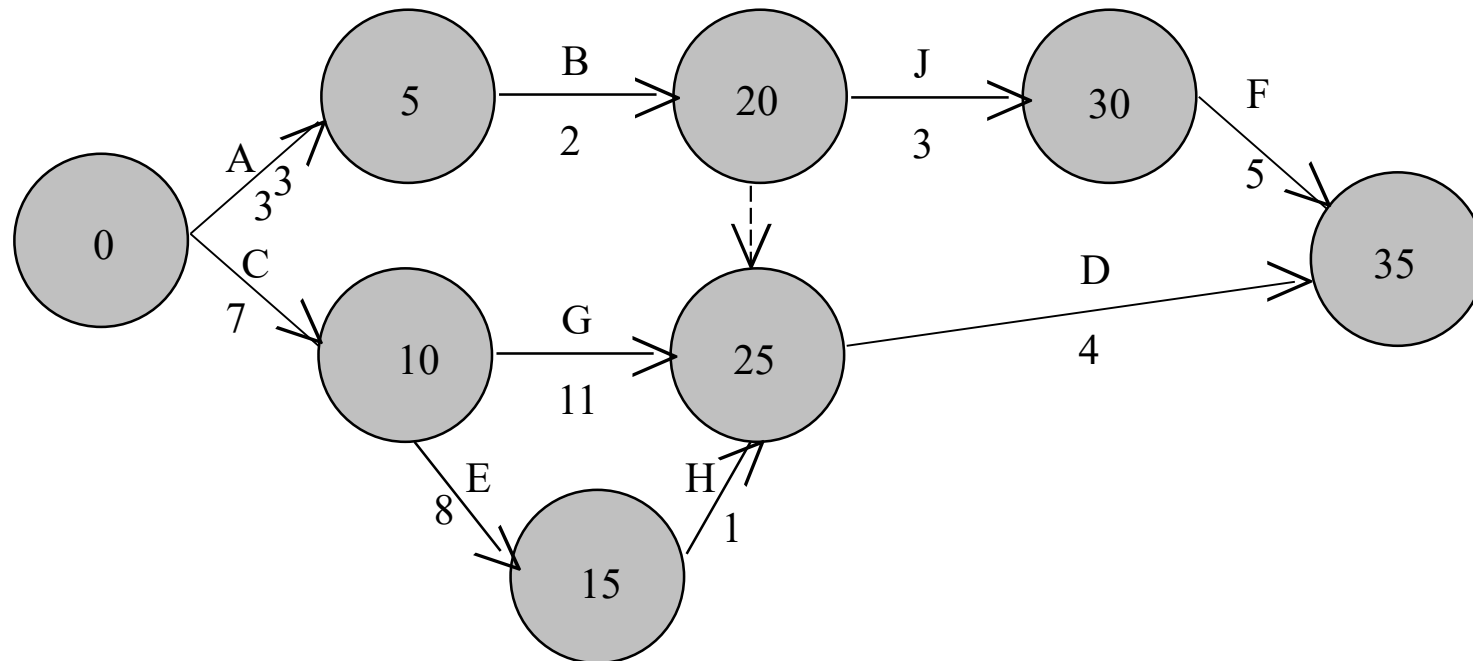
Tâche: fait évoluer le projet vers son état final.
=> **consomme temps**, énergie, matière, etc.
=> on lui associe un **coût**

+



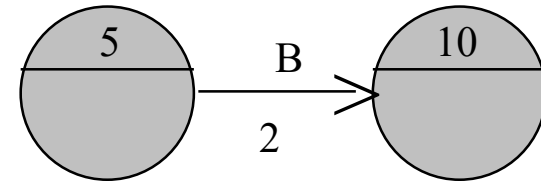
Une **tâche fictive** (i) représente une **contrainte** entre tâches non indépendantes. On lui associe un **arc en pointillés**. Sa durée est nulle, elle ne consomme aucune ressource : elle ne coûte rien.

Exemple:



Conventions

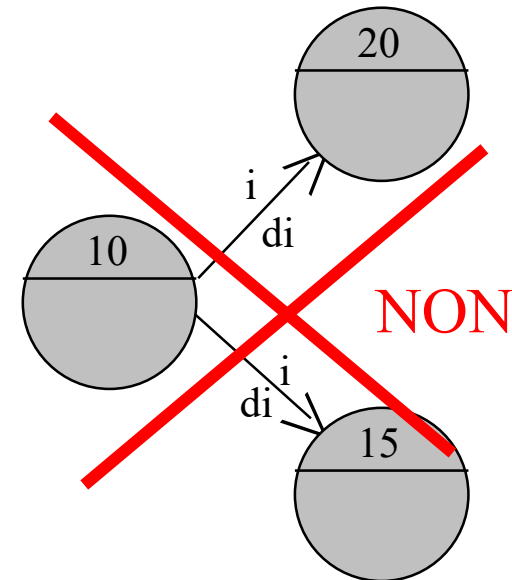
- toute tâche a **une** étape de début et **une** étape de fin



- un graphe commence et termine **toujours par un seul sommet**

sommets de début et fin du graphe : étapes de début et fin du projet

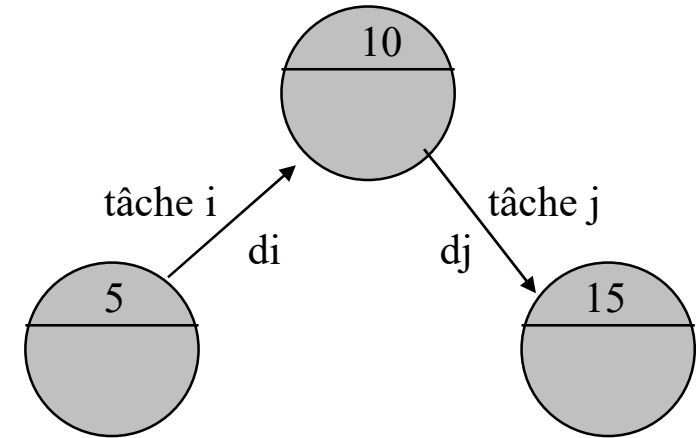
- on ne peut représenter une tâche que par **un seul arc**



- une tâche A est **antérieure** à une tâche B si A doit être réalisée avant B
- les antériorités immédiates sont appelées **antécédences**

* Exemple 1:

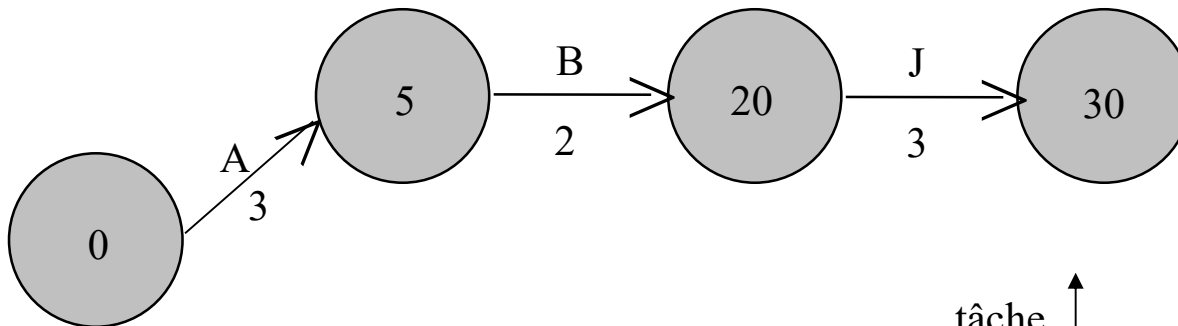
2 tâches i et j de durées respectives d_i et d_j , avec la contrainte "i est antérieure à j"



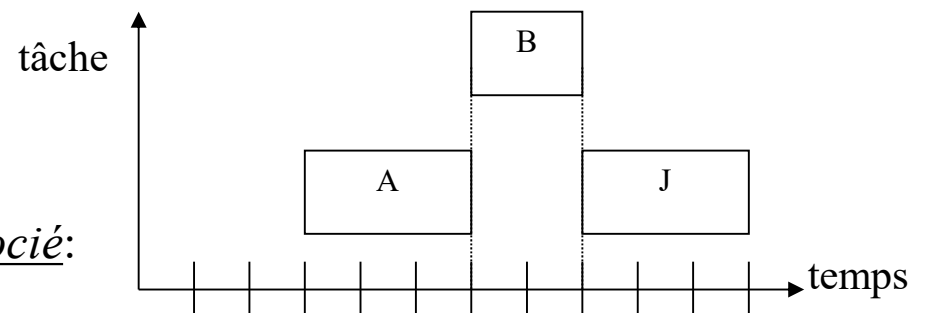
* Exemple 2:

A et B sont **antérieures** à J

B est **antécédente** de J



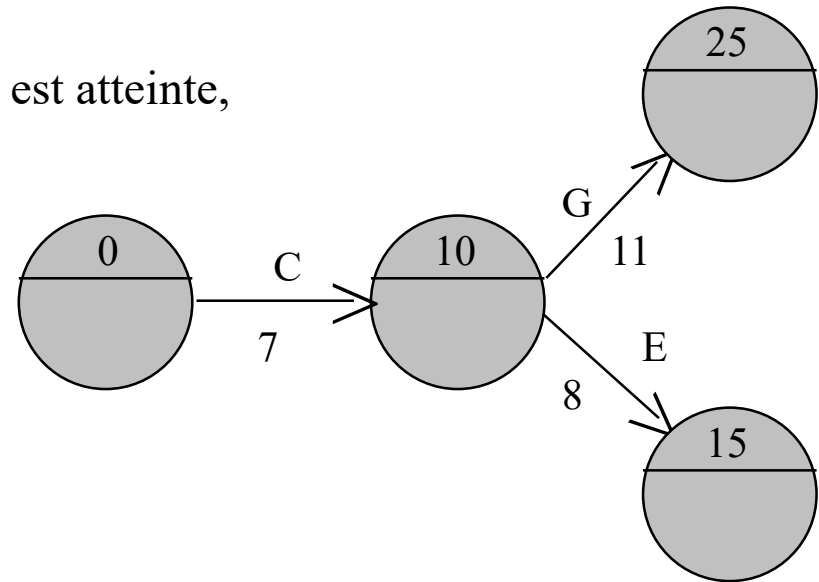
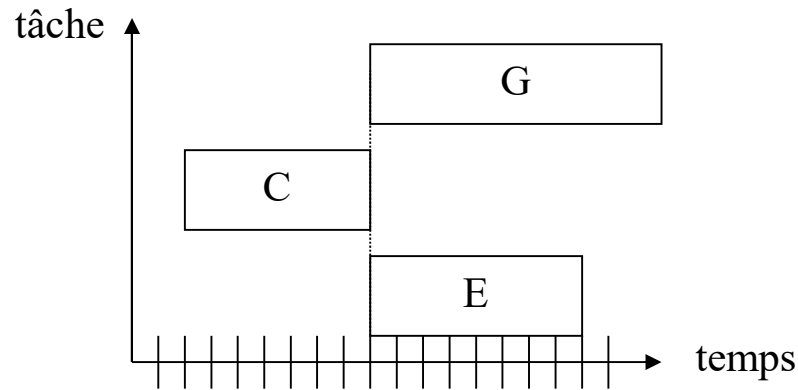
GANTT associé:



- 2 tâches **simultanées** commencent en même temps

* Exemple :

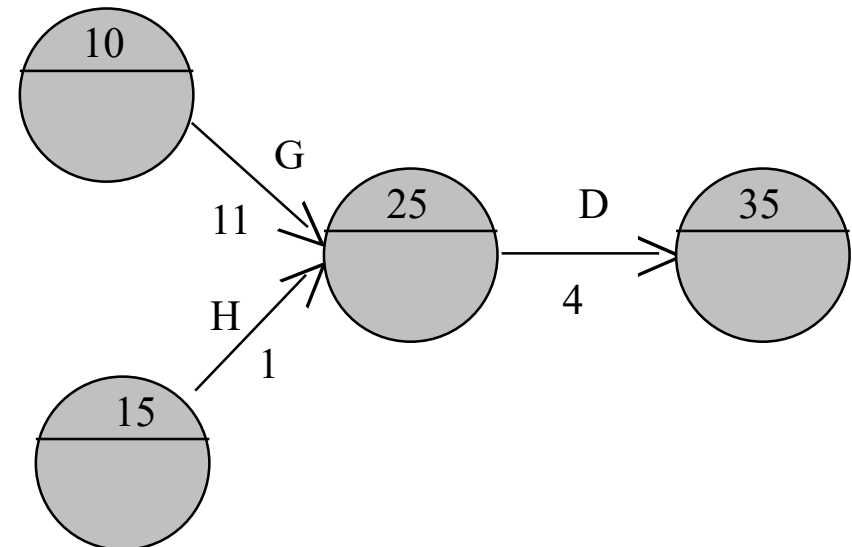
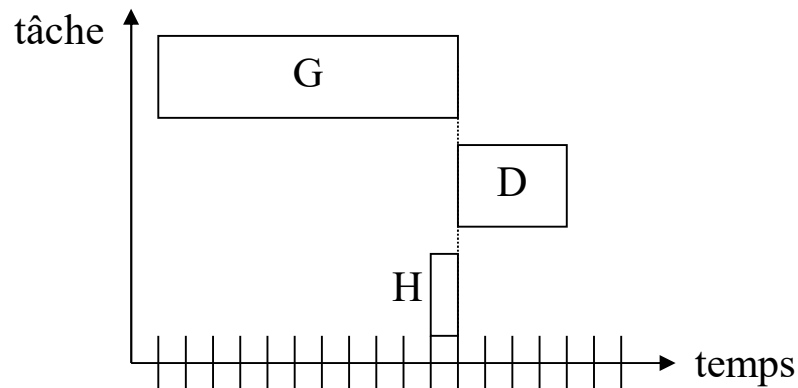
G et E ne peuvent commencer que si l'étape 10 est atteinte, donc si C est terminée




- 2 tâches **convergentes** précèdent une même tâche

* Exemple :

D ne peut commencer que si G et H sont terminées



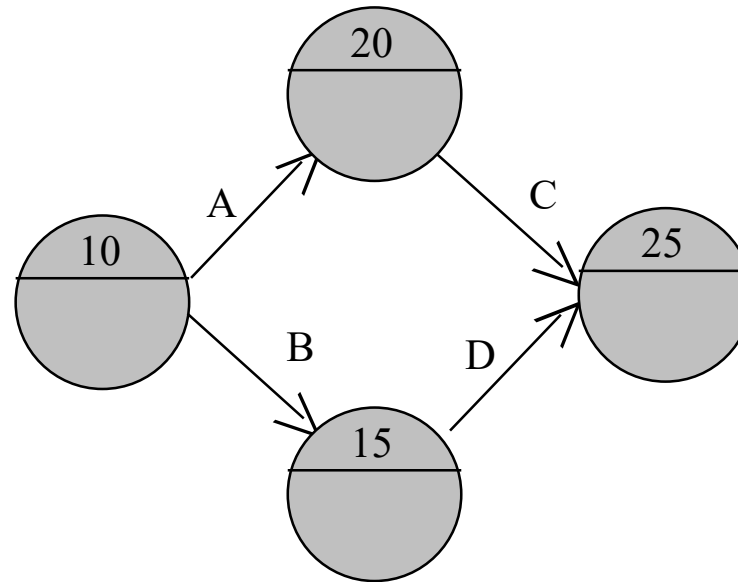
- Création d'une tâche fictive  artifice de représentation

* Exemple :

Soit le graphe PERT suivant:

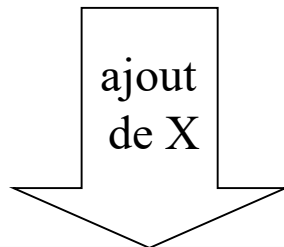
Il signifie que

- A et B sont simultanées
- C et D sont convergentes
- A précède C
- B précède D

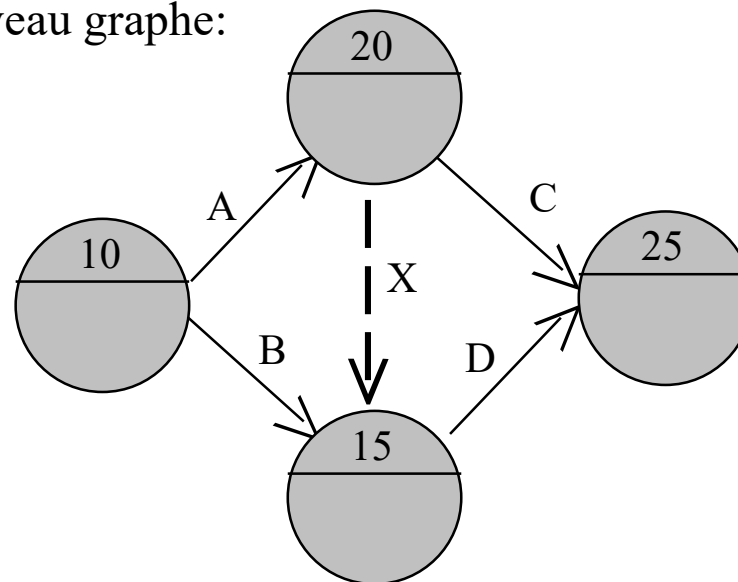


Ajout d'une contrainte: A précède D

=> nouveau graphe:



**X : tâche fictive de durée 0
CE N'EST PAS UNE TACHE
C'EST UNE CONTRAINTE**



• Exercice :

Tracer le graphe PERT représentant les conditions suivantes:

{
A précède B
A précède C
D précède B

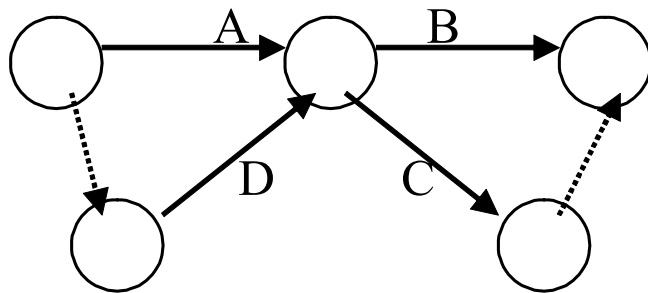
• Exercice :

Tracer le graphe PERT représentant les conditions suivantes:

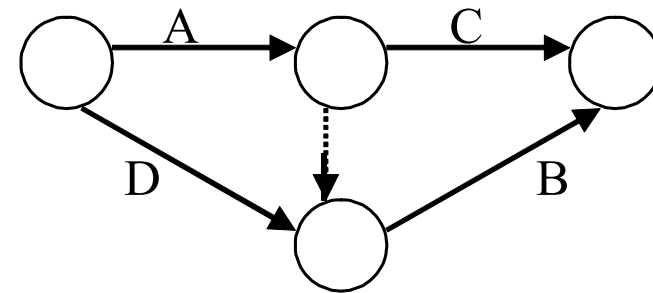
- A précède B
- A précède C
- D précède B

Solution:

1^{ère} représentation : fausse



2^o représentation : correcte



- Exemple de projet traité dans la suite:

tâches	durée (en heures)	tâches antérieures
A	4	-
B	17	-
C	20	B
D	25	A
E	8	C, D
F	7	C, D
G	3	E, F

II.2 Construction d'un réseau PERT : méthode par niveau

1) Construction de la matrice des dépendances


- ⇒ matrice carré d'ordre n (n = nombre de tâches du projet).
- ⇒ chaque tâche est inscrite 2 fois : en abscisse et en ordonnée
- ⇒ se remplit ligne par ligne

est antérieure à

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

Soit une tâche quelconque (E par exemple).

Dans la matrice, inscrire une croix dans la case intersection entre la ligne associée à E et la colonne associée à une des tâches antérieures à E (exemple C).

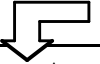
	A	B	C	D	E	F	G
E			X				

Recommencer la même démarche pour E avec ses autres antécédents.

Passer à une autre ligne de la matrice.

Réitérer la procédure jusqu'à ce que toutes les lignes soient considérées.

est antérieure à

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C		X					
D	X						
E			X	X			
F			X	X			
G					X	X	


tâches	tâches antérieures
A	-
B	-
C	B
D	A
E	C, D
F	C, D
G	E, F

2) Niveau des tâches

Matrice des dépendances complétée par des **colonnes de niveaux**

- ⇒ **Niveau 1** = ensemble des **sommets sans antécédent**
- ⇒ Chercher les lignes sans croix et barrer ces lignes
- ⇒ Inscrire les tâches correspondantes dans la colonne du niveau 1 et sur les lignes adéquates

est antérieure à

	A	B	C	D	E	F	G	niv 1
A								A
B								B
C		X						
D	X							
E			X	X				
F			X	X				
G					X	X		

Autres niveaux

- ⇒ Barrer les colonnes associées au niveau 1
- ⇒ Matrice réduite
- ⇒ Même démarche pour le **niveau 2**
 - ⇒ chercher les lignes vides de la matrice réduite...
 - ⇒ Jusqu'à ce que toutes les taches soient classées par niveau

est antérieure à

	A	B	C	D	E	F	G	niv 1
A								A
B								B
C		X						
D	X							
E			X	X				
F			X	X				
G					X	X		

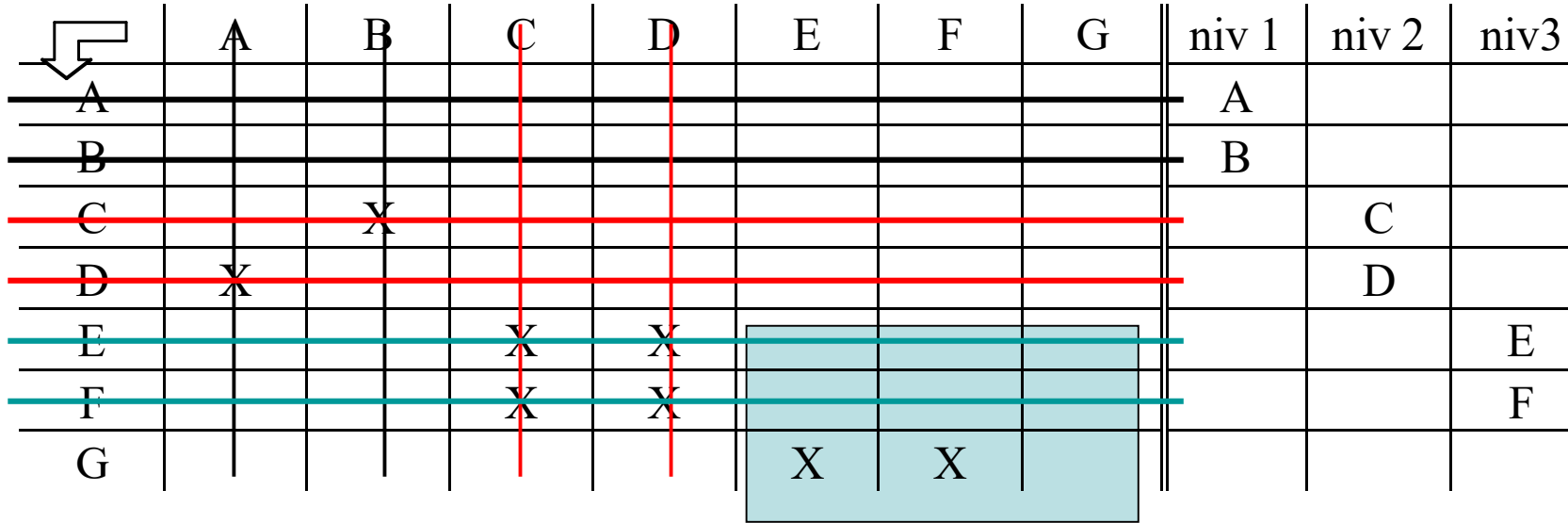
est antérieure à

	A	B	C	D	E	F	G	niv 1	niv 2
A								A	
B								B	
C		X							C
D	X								D
E			X	X					
F			X	X					
G					X	X			

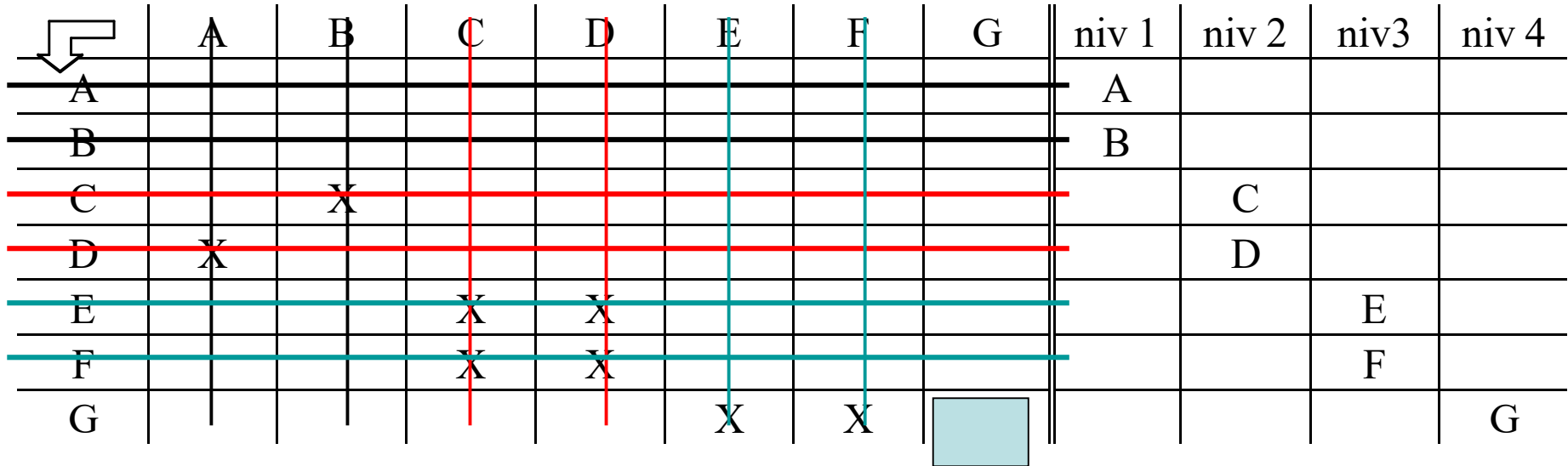
est antérieure à

	A	B	C	D	E	F	G	niv 1	niv 2
A								A	
B								B	
C		X							C
D	X								D
E			X	X					
F			X	X					
G					X	X			

est antérieure à



est antérieure à



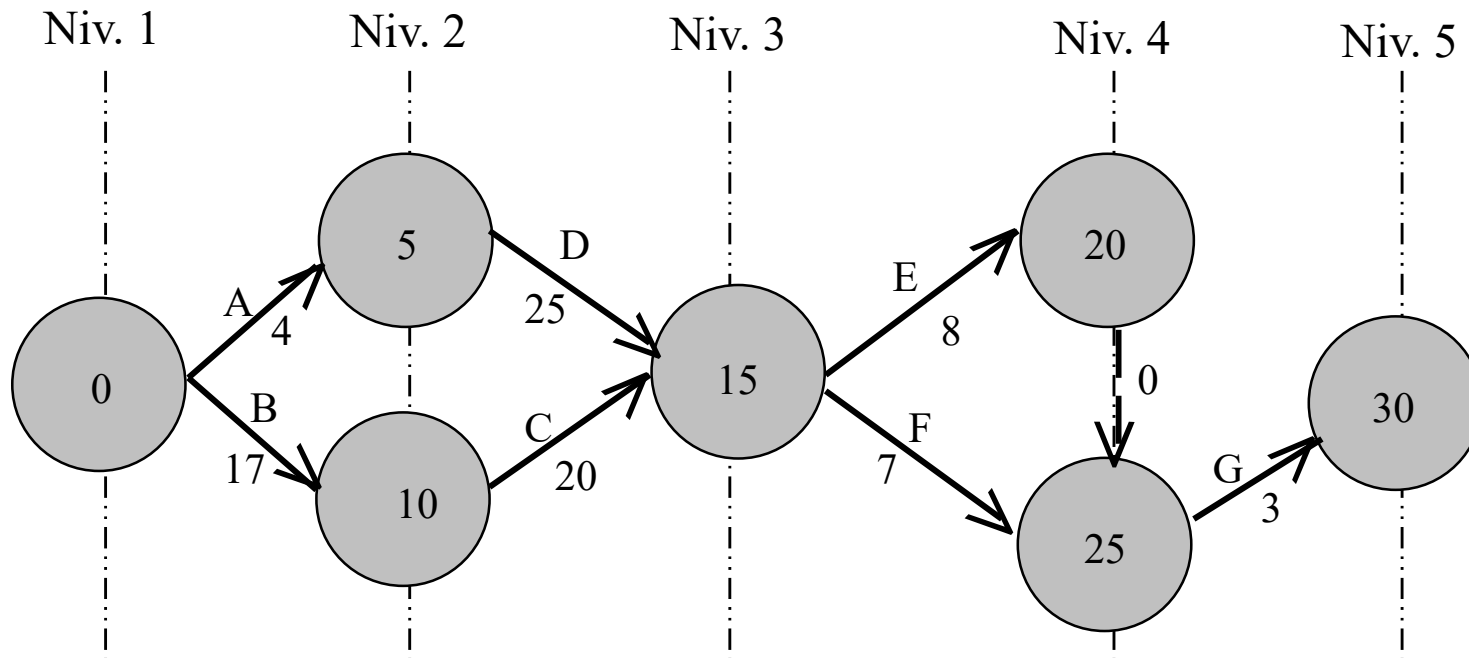
Niveau = position des sommets des taches correspondantes

Niveau = position des sommets « origine » des tâches correspondantes

Niveau 1 : A et B / Niveau 2 : C et D / Niveau 3 : E et F / Niveau 4 : G

**graphe
PERT**

Canevas: colonnes \Leftrightarrow niveaux
- Taches dans colonnes
- Étapes sur lignes de séparation



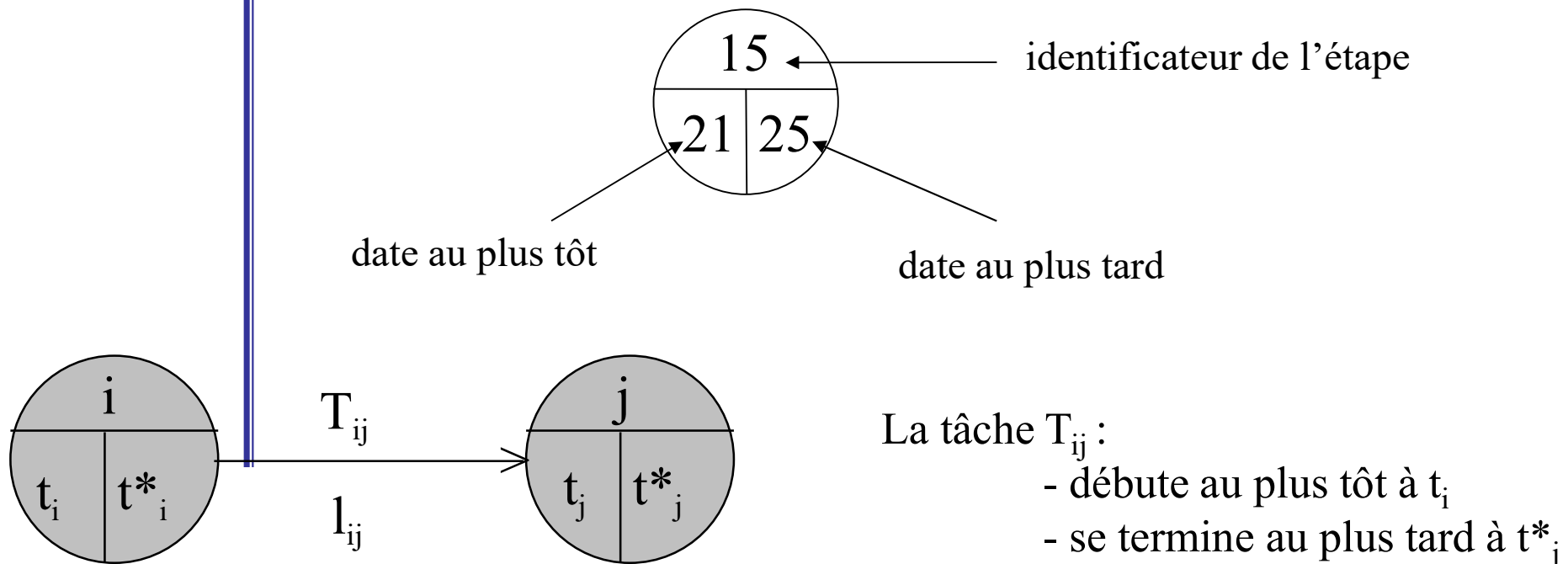
Analyse temporelle d'un graphe PERT

but = déterminer : - la durée totale du projet,
 - le degré de liberté des tâches les unes par rapport aux autres.

<= **modification du graphe** : 2 infos supplémentaires à chaque sommet :

- la date de début au plus tôt
- et la date de début au plus tard

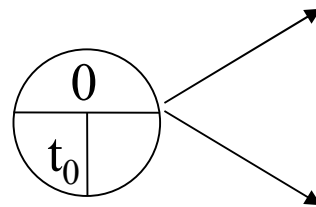
de la tâche ayant l'étape considérée comme origine.



II.3 Calcul des dates d'exécution au plus tôt

t_j date d'arrivée au plus tôt à l'étape E_j

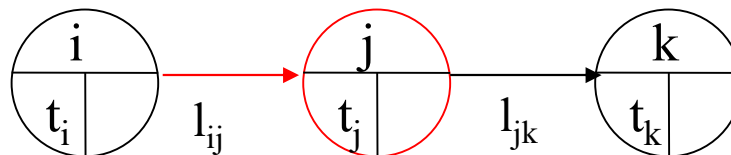
cas 1 : 1ère étape du graphe : pas de prédécesseur



$$t_0 = 0$$

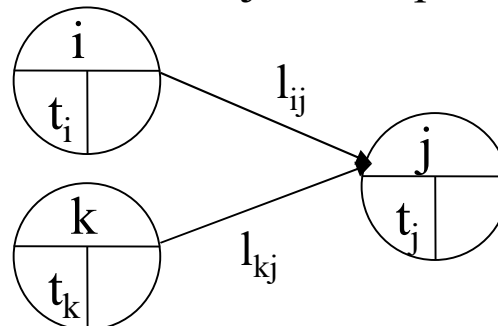
(E₀ est l'étape de début du projet)

cas 2 : E_j est l'étape de **fin** d'exécution d'une seule tâche



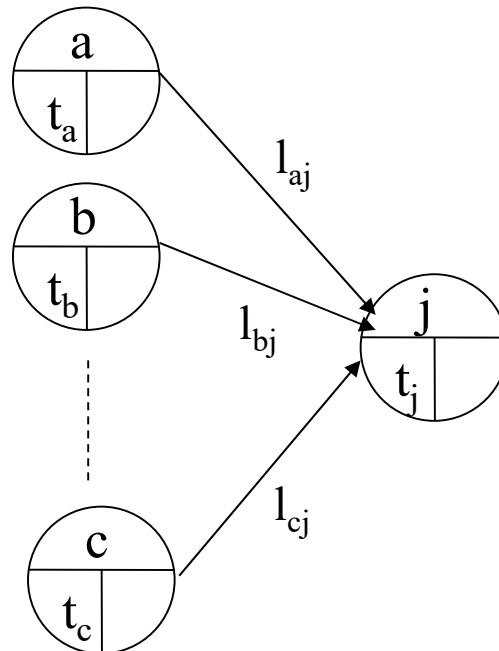
$$t_j = t_i + l_{ij}$$

cas 3 : E_j est l'étape de **fin** d'exécution de 2 tâches



$$t_j = \text{Max} (t_i + l_{ij}, t_k + l_{kj})$$

cas 4 : cas général E_j est l'étape de **fin** d'exécution de plusieurs tâches



$$t_j = \text{Max} (t_i + l_{ij})$$

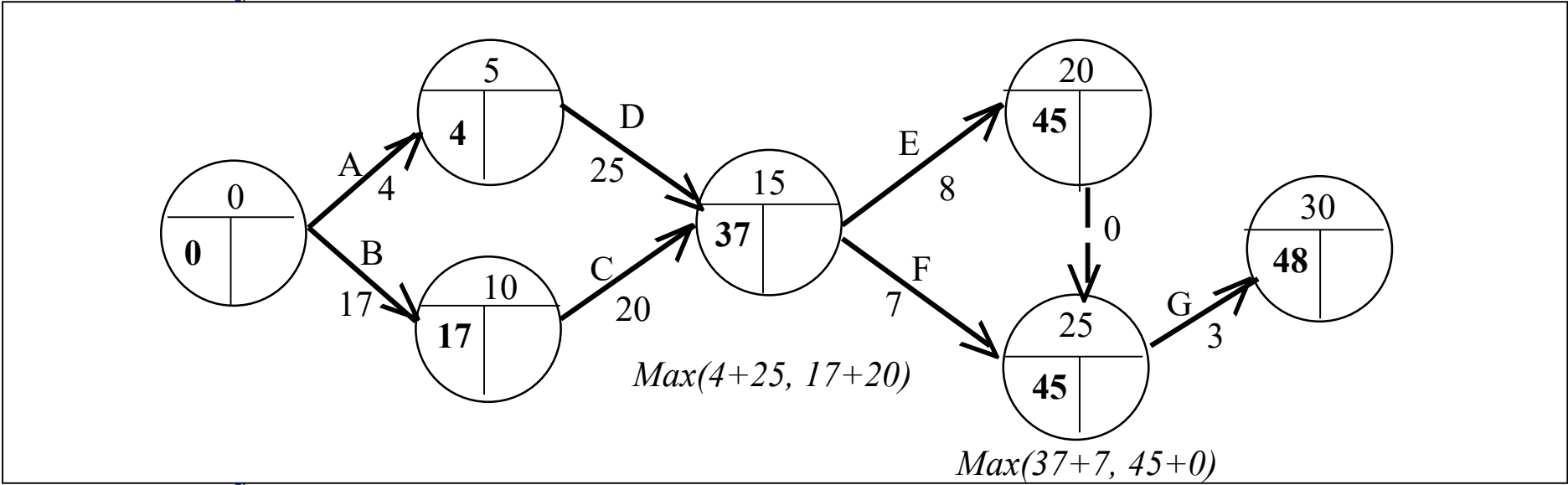
$$u=(i,j) \in U_j^-$$

U_j^- : ensemble des arcs ayant l'étape E_j
pour extrémité terminale

$t_j =$ valeur du chemin de longueur maximale
ayant E_0 pour origine et E_j pour extrémité

Parcours du graphe de gauche à droite:
Additionner les durées des tâches les unes aux autres
Prendre la plus grande valeur aux intersections

dates au plus tôt positionner les dates dans la partie inférieure gauche des sommets

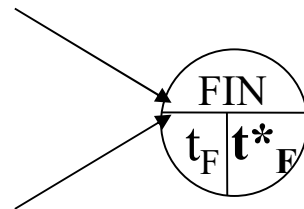


Date au plus tôt dernière étape du PERT
 =
Durée minimale de réalisation du projet

II.4 Calcul des dates d'exécution au plus tard

t_j^* date de départ au plus tard de l'étape
 E_j

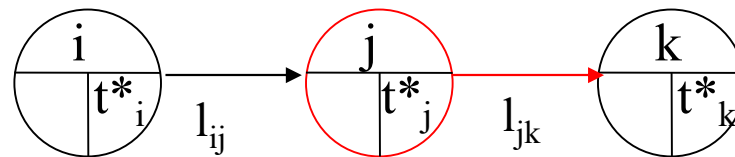
cas 1 : dernière étape du graphe E_F : pas de successeur



$$t_F^* = t_F$$

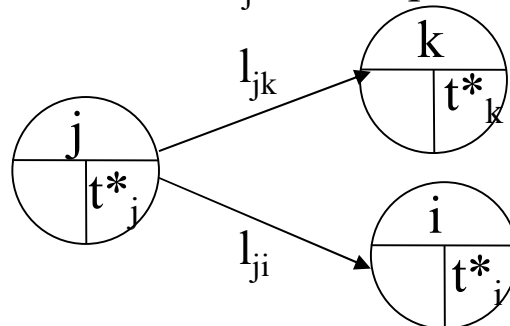
(pour réaliser la durée minimale)

cas 2 : E_j est l'étape de début d'exécution d'une seule tâche



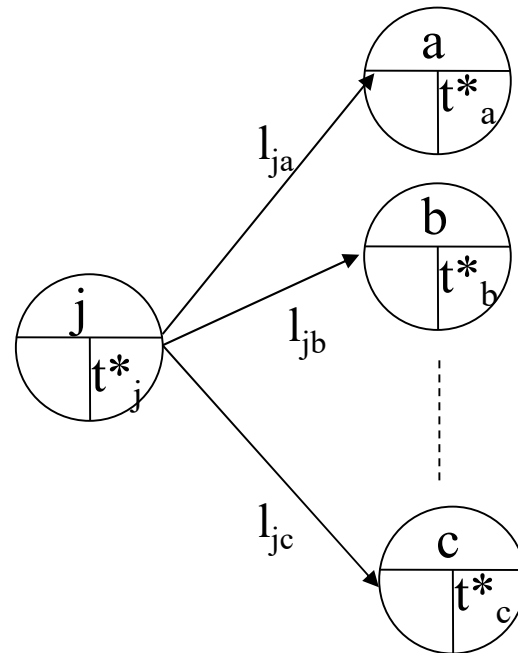
$$t_j^* = t_k^* - l_{jk}$$

cas 3 : E_j est l'étape de début d'exécution de 2 tâches



$$t_j^* = \text{Min} (t_i^* - l_{ji}, t_k^* - l_{jk})$$

cas 4 : cas général E_j est l'étape de **début** d'exécution de plusieurs tâches

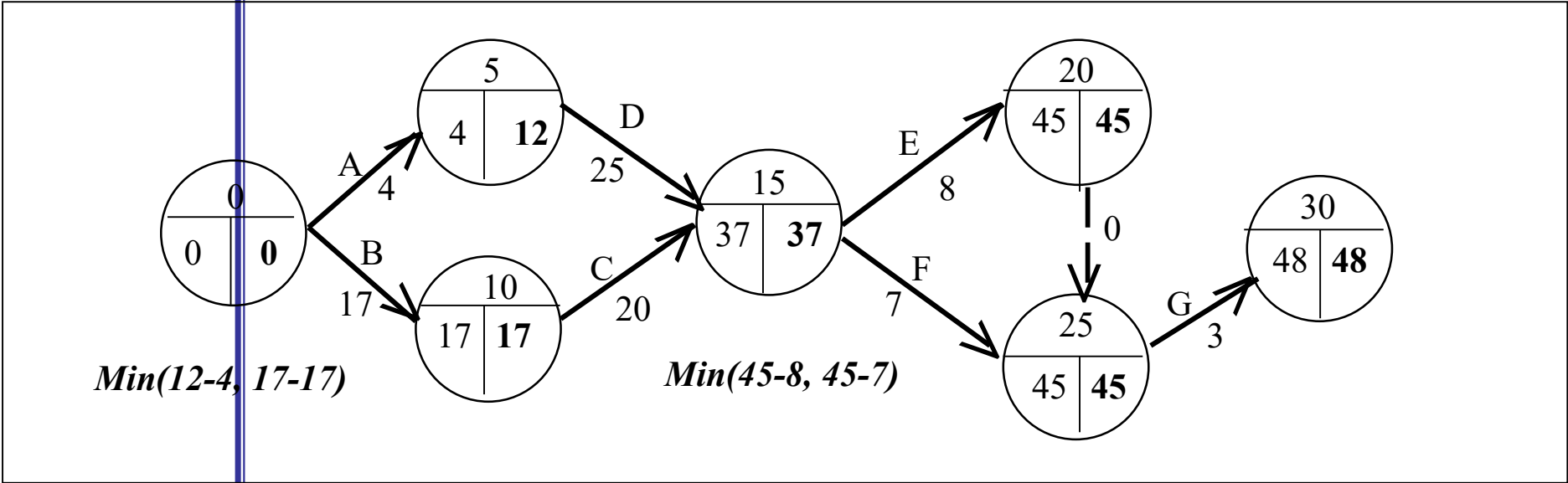


$$t^*_j = \text{Min} (t^*_i - l_{ji})$$
$$u=(j,i) \in U_{j+}$$

U_{j+} : ensemble des arcs ayant l'étape E_j
pour extrémité initiale

Parcours du graphe de droite à gauche :
Soustraire les durées des tâches les unes aux autres
Prendre la plus petite valeur aux intersections

dates au plus tard positionner les dates dans la partie inférieure droite des sommets



Date au plus tard première étape du PERT = 0

II.5 Détermination des marges

Marges

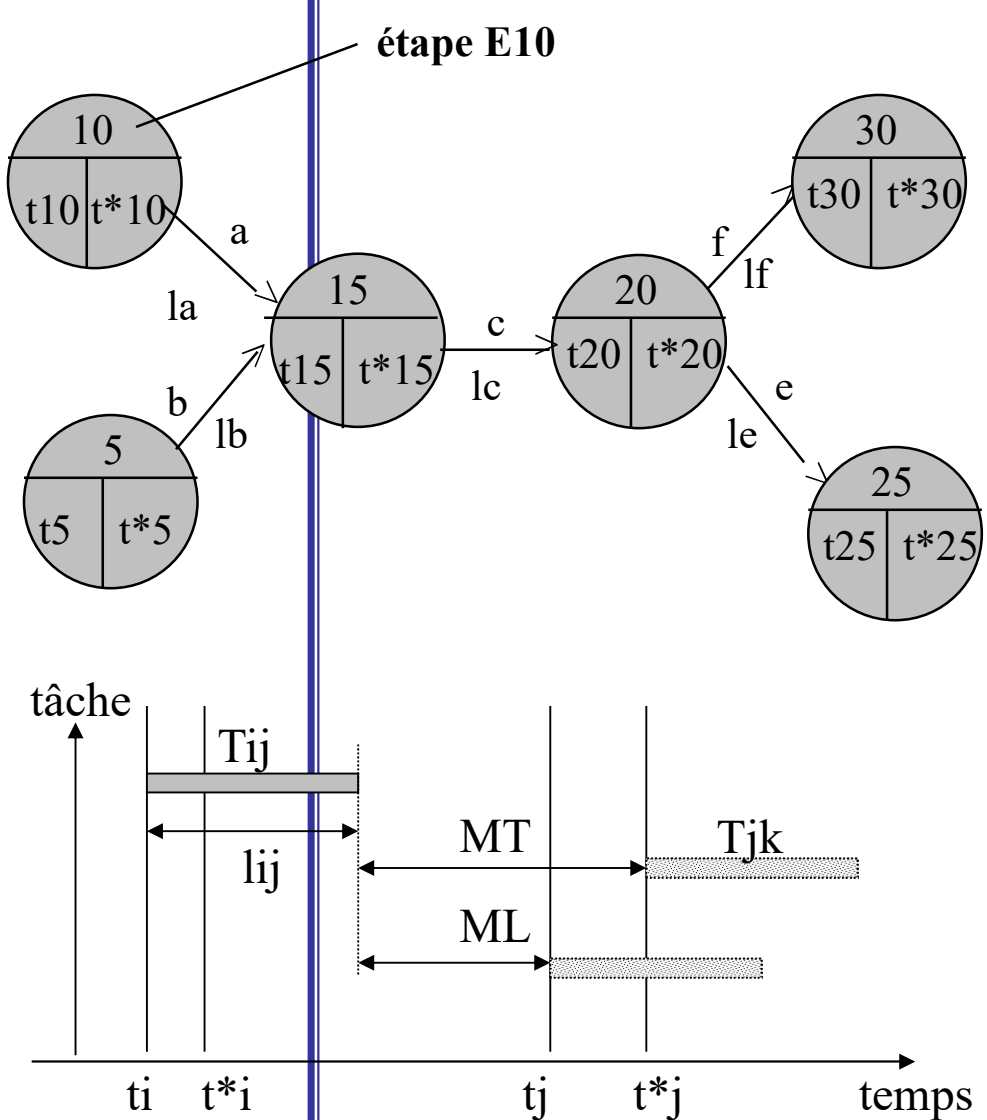
- degré de liberté dans l'accomplissement des tâches

- utiles pour : * répartir les moyens

* réduire les temps

* jouer sur les coûts

II.5 Détermination des marges



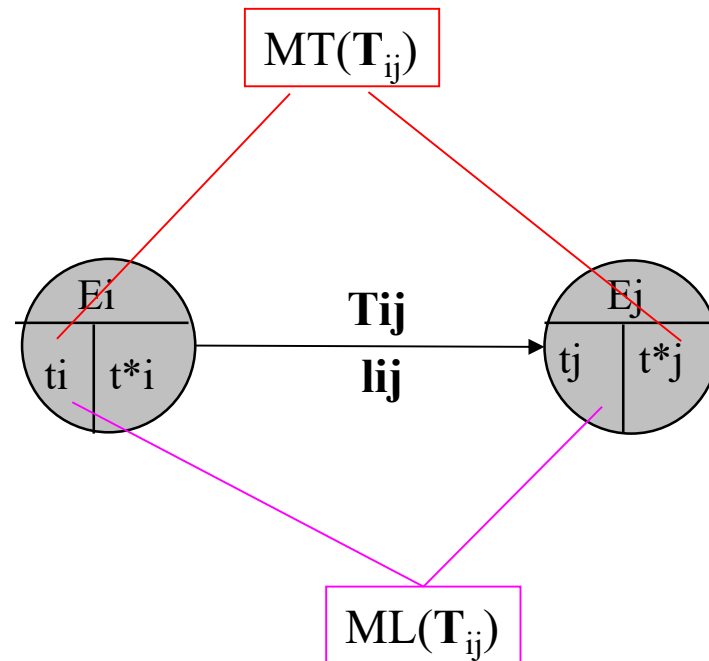
- marge **totale** de T_{ij} : retard toléré sans modification de la durée totale mais retarde les successeurs

$$MT(T_{ij}) = t^*_j - t_i - l_{ij}$$

- marge **libre** de T_{ij} : retard toléré sans modification pour la suite du projet

$$ML(T_{ij}) = t_j - t_i - l_{ij}$$

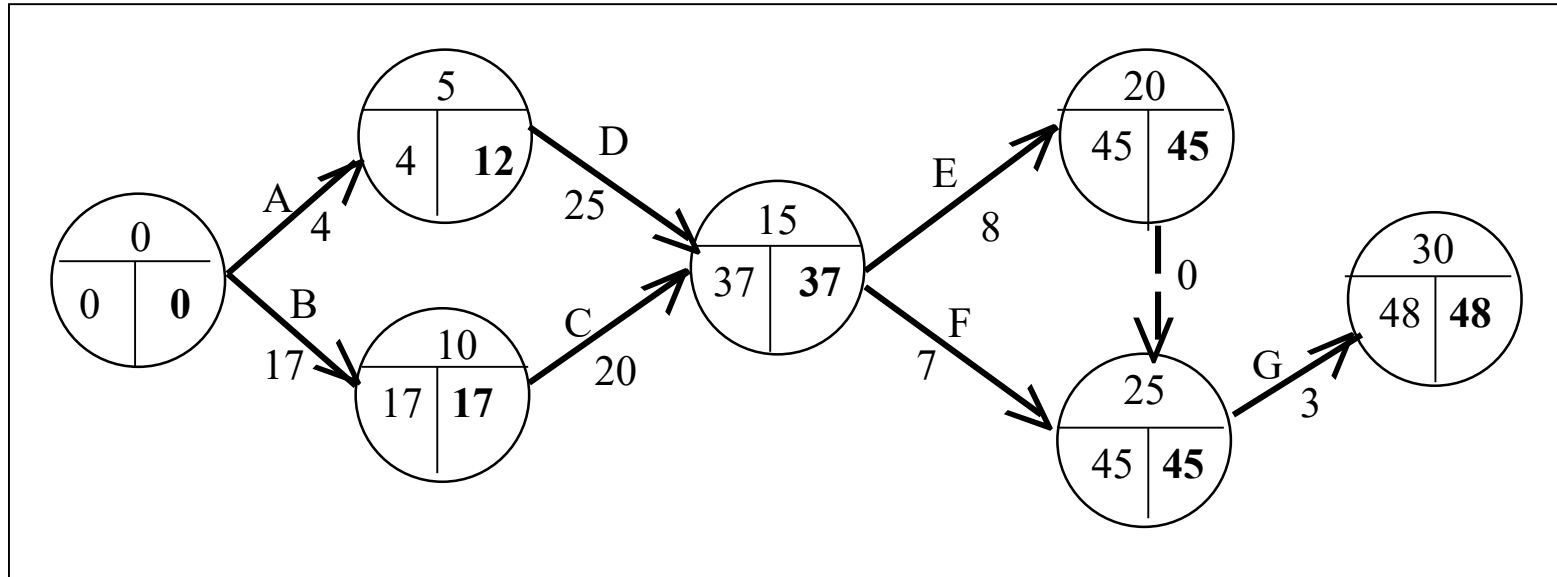
II.5 Détermination des marges



$$MT(T_{ij}) = t^*_j - t_i - l_{ij}$$

$$ML(T_{ij}) = t_j - t_i - l_{ij}$$

II.5 Détermination des marges



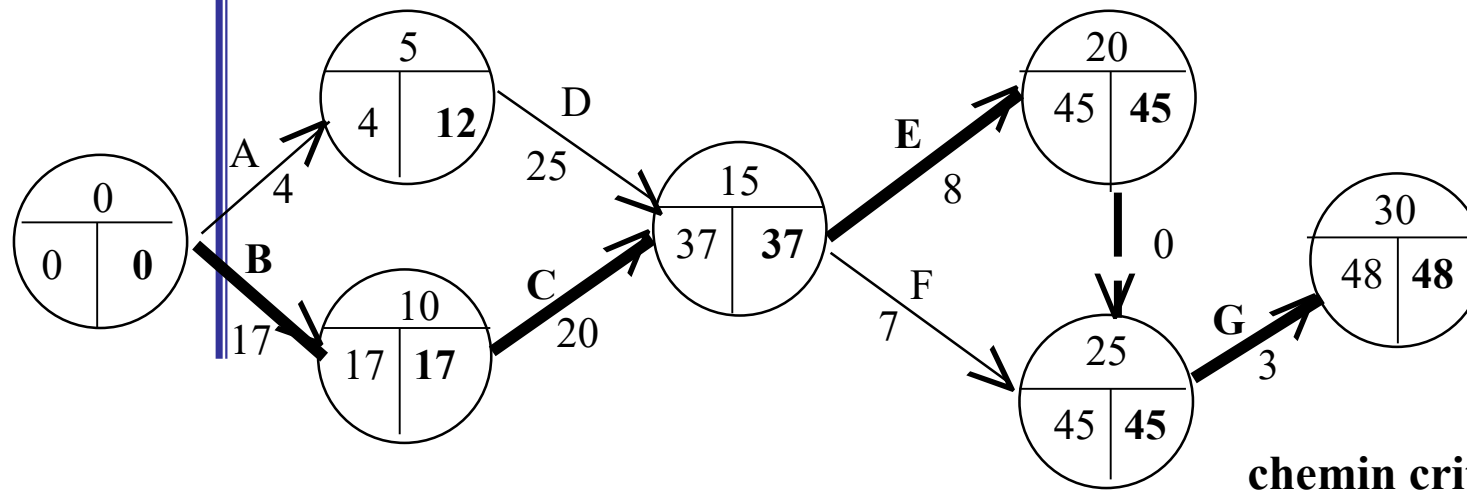
tâches	MT	\geq	ML
A	$8 = 12 - 0 - 4$		$0 = 4 - 0 - 4$
B	$0 = 17 - 0 - 17$		0
C	$0 = 37 - 17 - 20$		0
D	$8 = 37 - 4 - 25$		$8 = 37 - 4 - 25$
E	0		0
F	$1 = 45 - 37 - 7$		1
G	0		0

II.6 Détermination du chemin critique

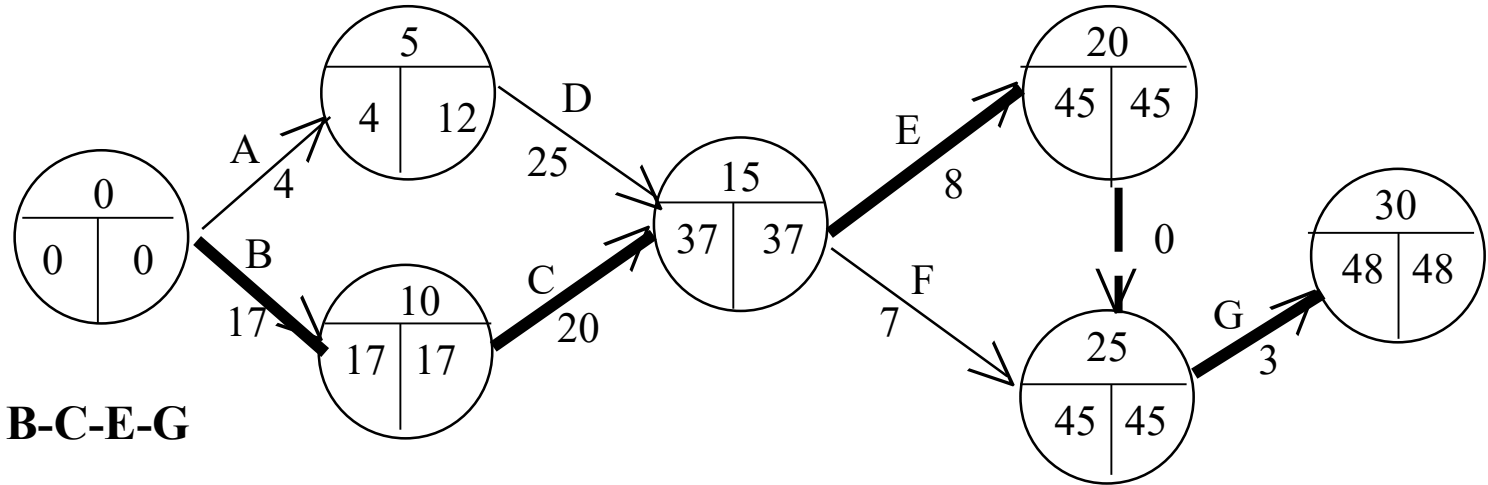
chemin critique = chemin plus long que tous les autres
constitué de tâches critiques et d'étapes critiques

tâches critiques : la tâche T_{ij} est critique
ssi **marge totale(T_{ij}) = 0** \longrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{date au plus tôt } t_i = \text{date au plus tard } t^*i \\ \text{date au plus tôt } t_j = \text{date au plus tard } t^*j \end{array} \right.$

tâches du chemin critique = fixent le délai de réalisation du projet
délai minimal = somme des durées des tâches du chemin critique



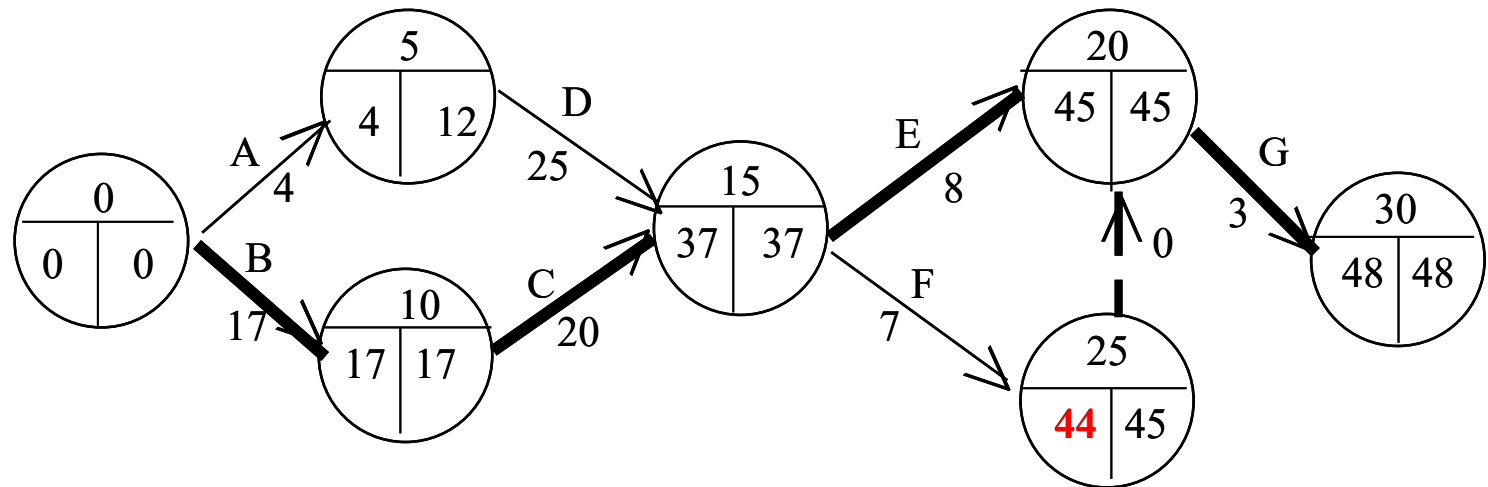
chemin critique = B-C-E-G



chemin critique = B-C-E-G

Attention: F non critique: $MT(F) \neq 0$

Autre construction équivalente ⇕



Réseau PERT du projet Mididanse

