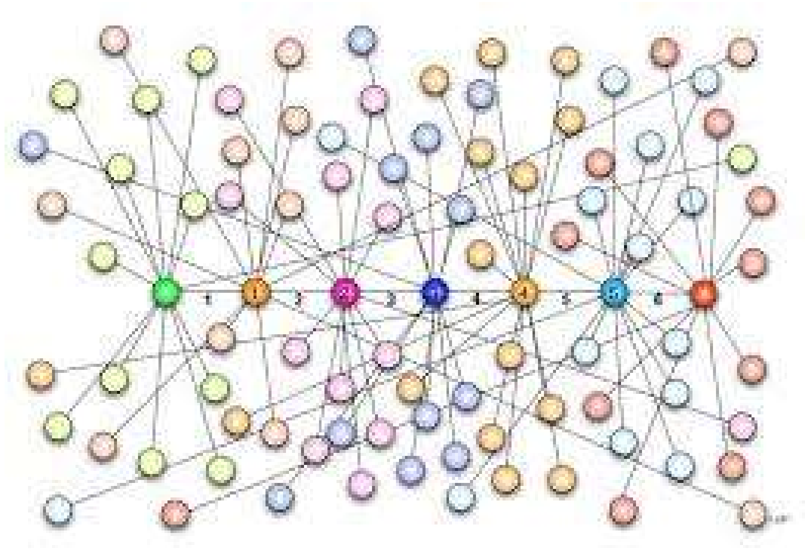
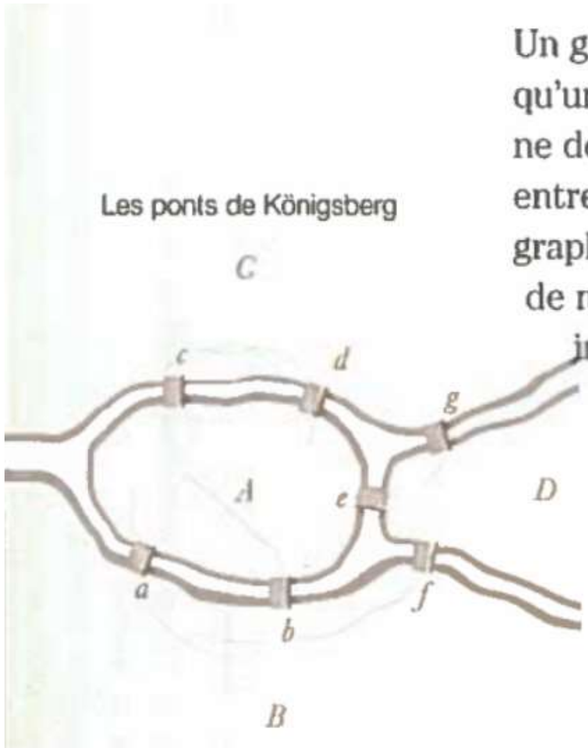
Eléments de Théorie des graphes



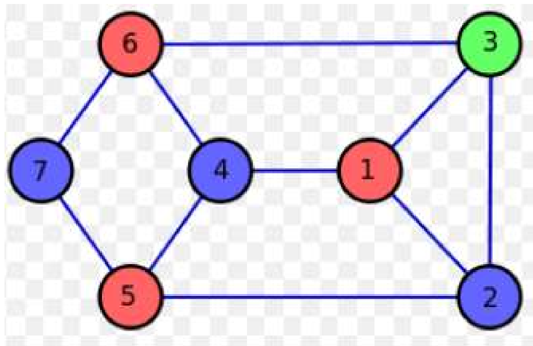
Marie-Ange MANIER

Extrait du cours MANIER M.-A. « Ordonnancement »
(Formation d'ingénieurs en logistique par alternance, UTBM, 2021)

II.1 Introduction



Un graphe est un squelette qui ne retient qu'une partie de la réalité, cette partie ne décrivant qu'un certain type de liens entre des éléments. La théorie des graphes consiste donc en un processus de modélisation qui filtre plusieurs informations pour faire ressortir celles qui nous intéressent sous un certain rapport. C'est en faisant ainsi abstraction d'un pan de la réalité que le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) a pu apporter, en 1736, une réponse définitive aux citoyens et citoyennes de la ville de Königsberg, en Allemagne, qui voulaient savoir si, partant de leur maison, il leur était possible de faire une promenade dans leur ville en passant une seule fois sur chacun des ponts, pour finalement revenir chez eux (voir le plan ci-contre). Il était de tradition, dans cette ville, d'essayer de trouver un tel trajet, mais personne n'y était arrivé. Euler a démontré que cela était impossible Plusieurs problèmes ont marqué la lente évolution de la théorie des graphes. Le plus célèbre est celui des quatre couleurs.



Voici l'évolution de la ville de Königsberg en graphe...

Carte de la ville.

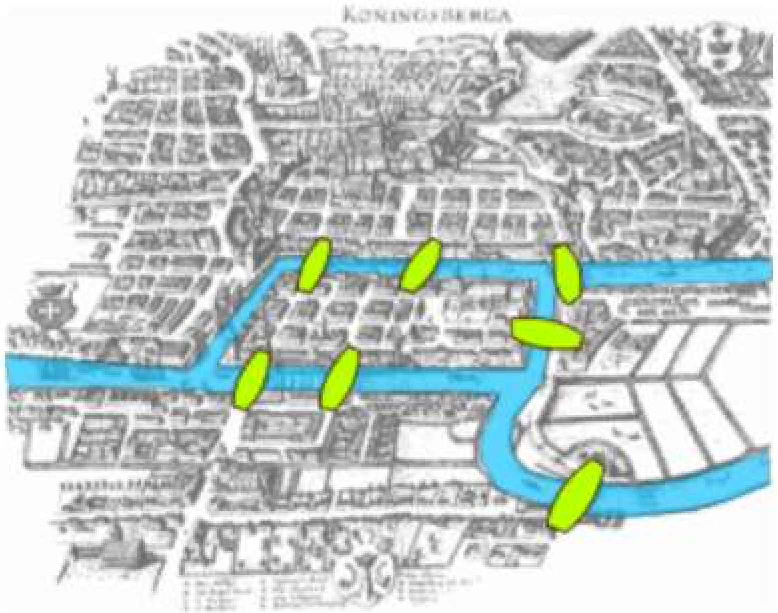
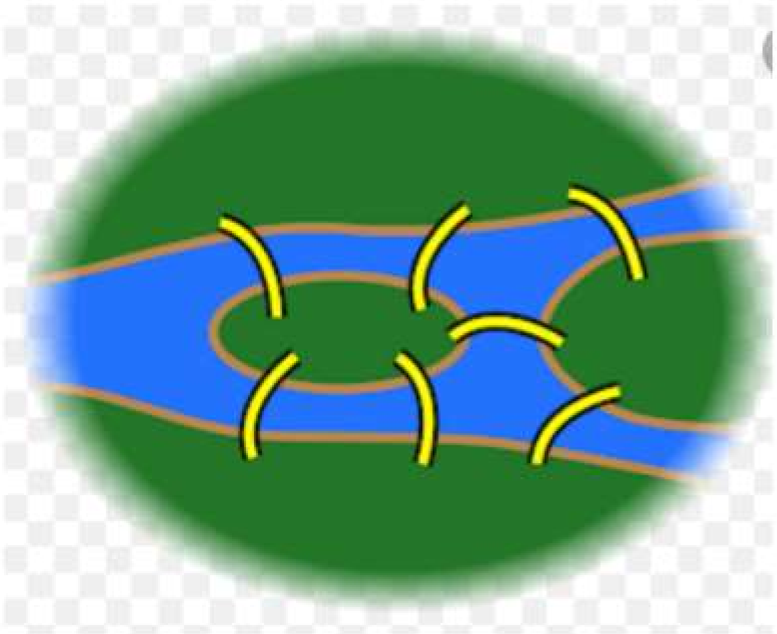
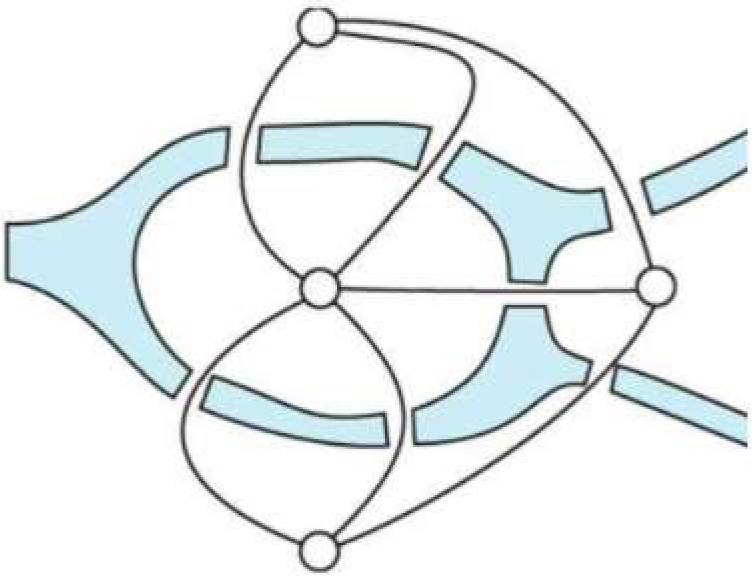


Schéma simplifié de la ville.



Graphe de la ville... Cercles (sommets) et lignes (arêtes)



Développement de la théorie des graphes

A partir de <u>1946</u>:

grand développement de la théorie des graphes sous l'impulsion de spécialistes de la Recherche Opérationnelle*, motivés par des problèmes concrets (Kuhn 1955, Ford et Fulkerson 1956, Roy 1959, ...).

Depuis <u>1960</u>:

apparition des 1ers calculateurs électroniques

=> nombreuses recherches sur la théorie des graphes et applications.

***Recherche Opérationnelle** : approche scientifique des problèmes de gestion, de décisions qui se rencontrent dans les grandes organisations publiques ou privées.

Etapes d’une étude de Recherche Opérationnelle :

- **modélisation du problème** :

à partir d'un problème concret, bâtir un modèle scientifique (en général mathématique) représentant schématiquement la réalité ;

- **résolution du problème** : résoudre le modèle ainsi construit.

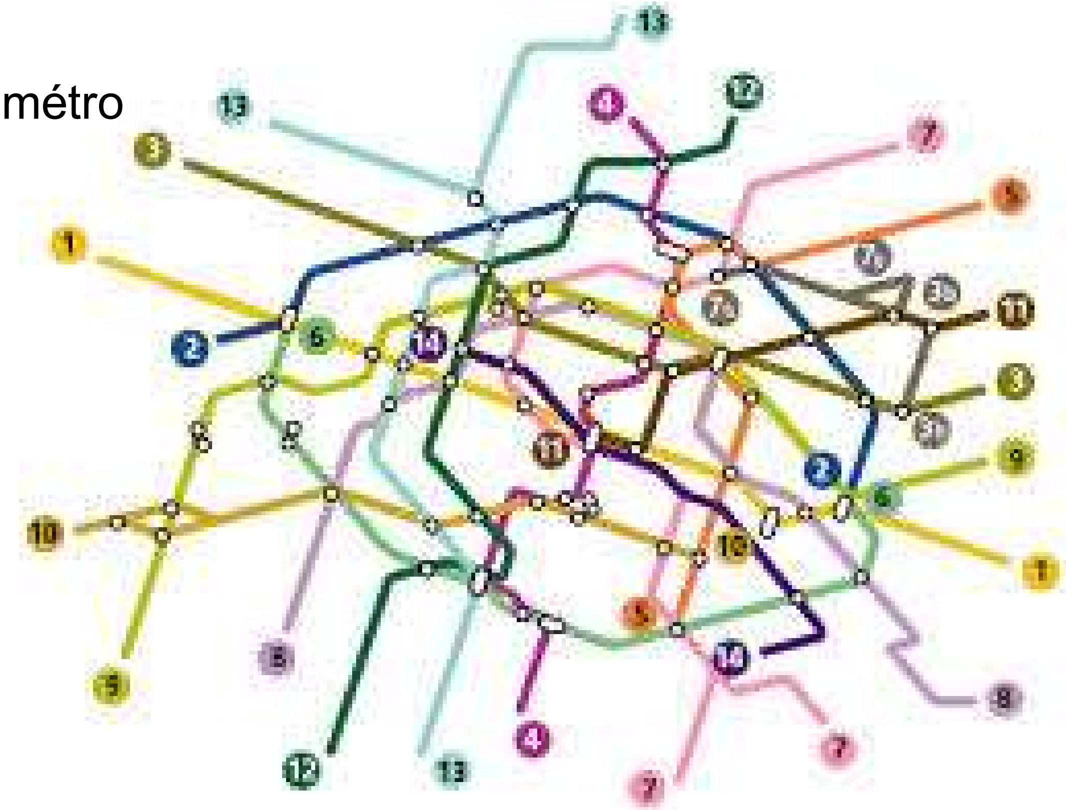
résolution = mise en oeuvre de méthodes numériques permettant d'obtenir des réponses effectives, en général à l'aide d'ordinateurs, aux questions posées ;

- **retour au problème pratique** et **confrontation** des résultats du modèle et de la réalité.

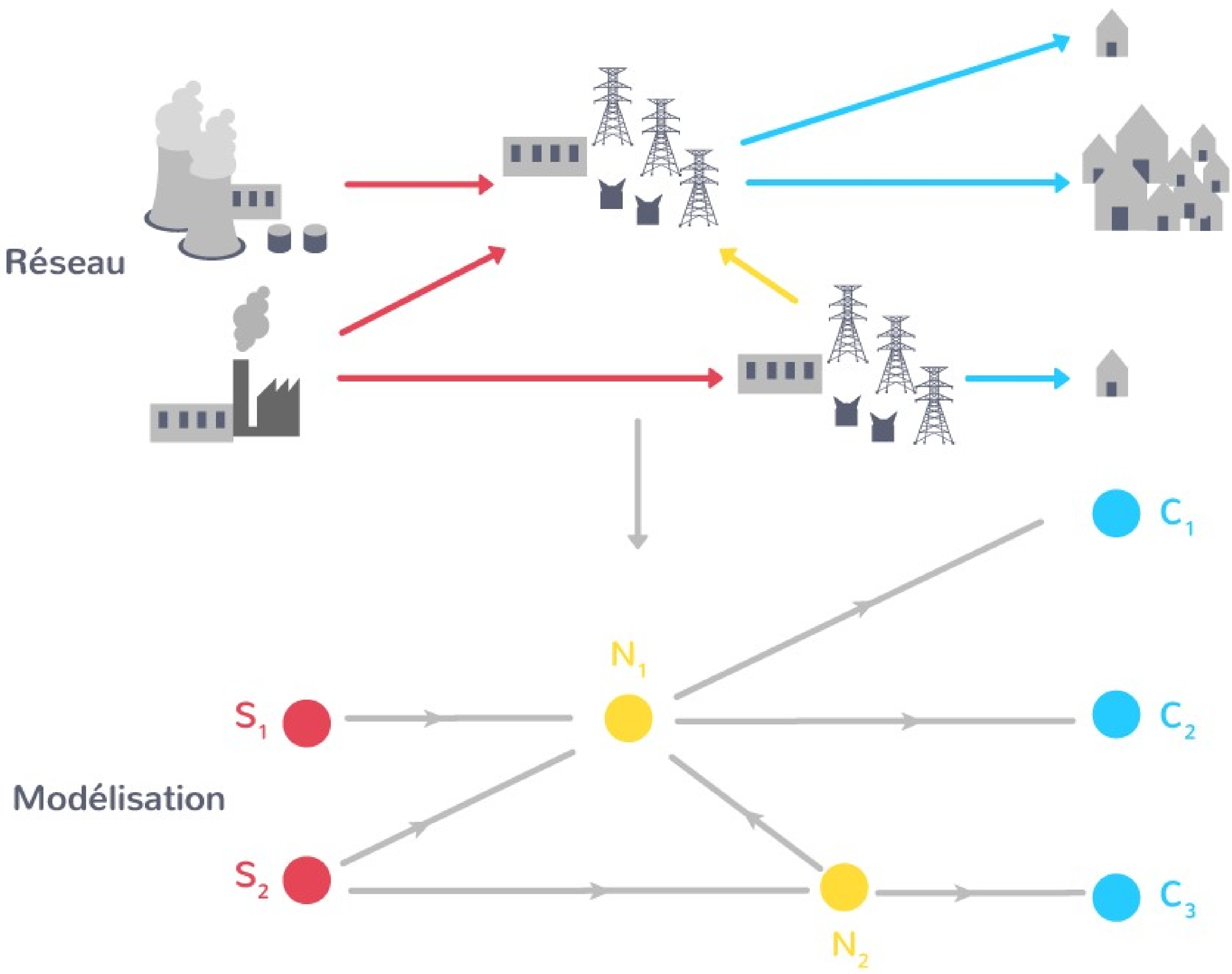
Le <u>langage des graphes</u> permet de représenter simplement la structure d'un grand nombre de situations

exemples : réseau de routes représenté par une carte routière, réseau de communication, réseaux électriques,…

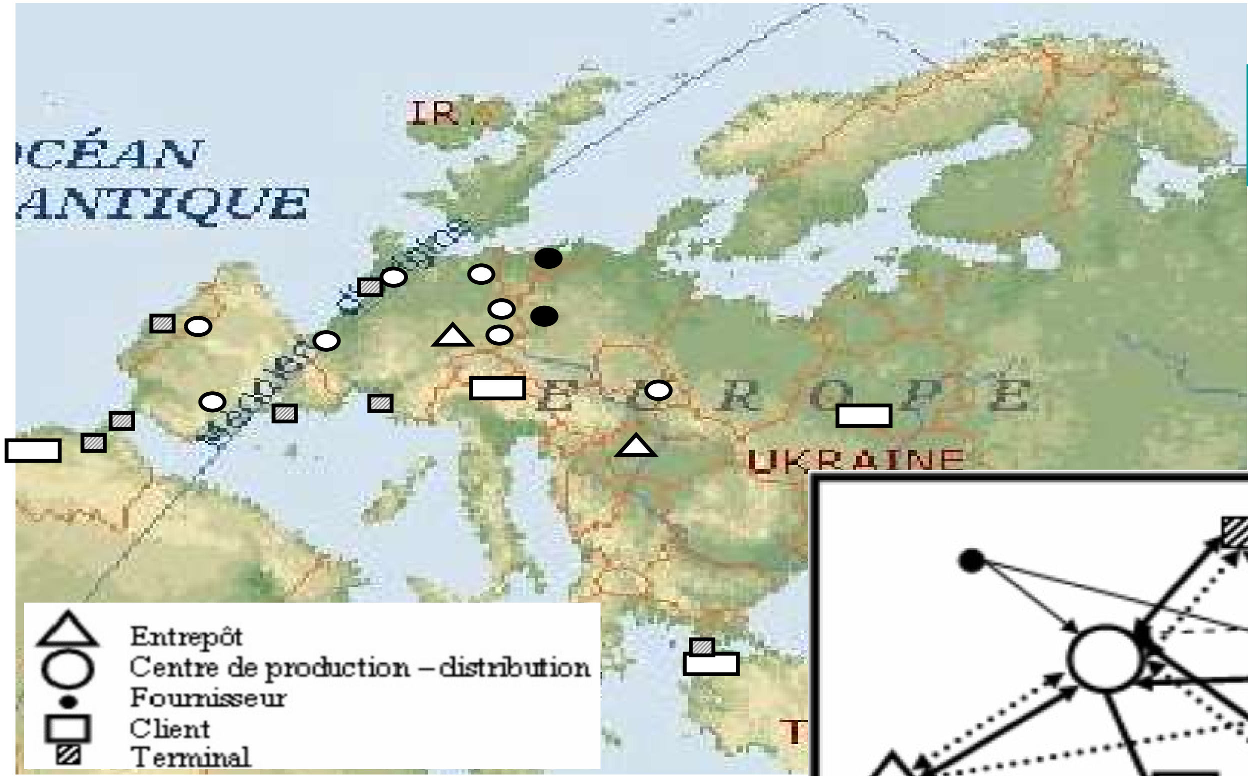
*Ligne de bus ou de métro

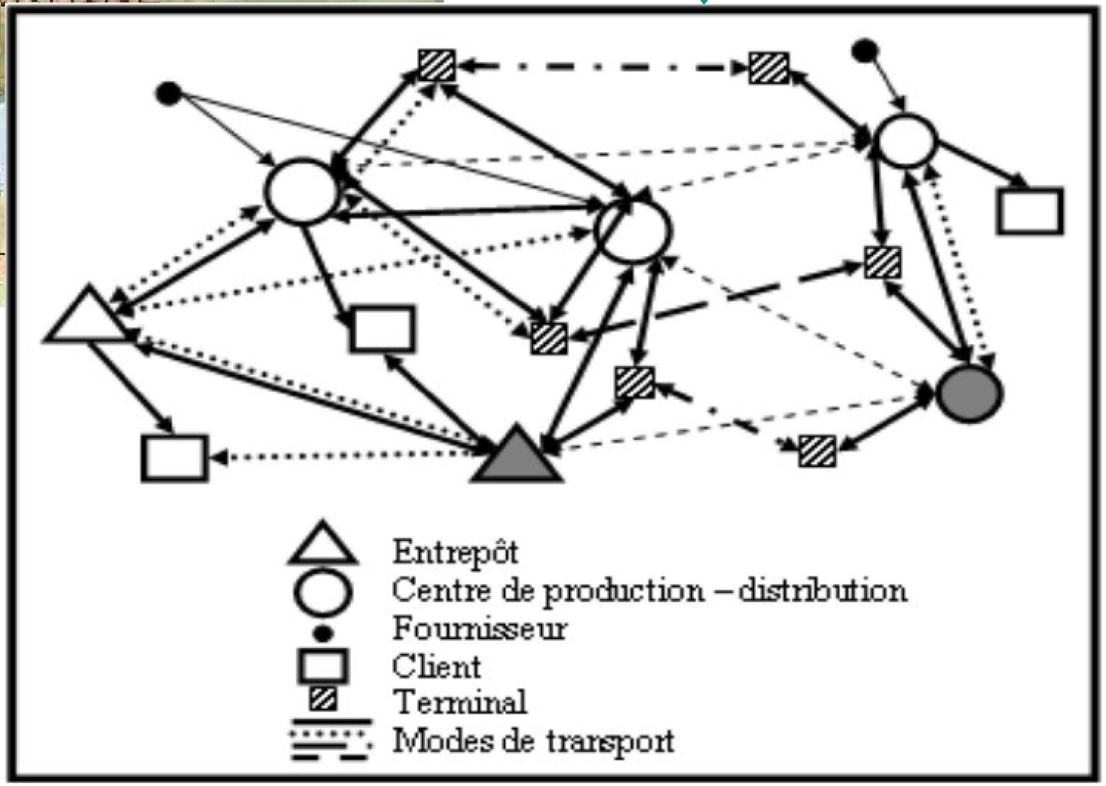


* Modélisation d'un réseau électrique par un graphe orienté



* Réseau de transport multimodal





II.2 Définitions et concepts de base

II.2.1 Graphes

Un graphe noté G = (X, U) est constitué :

- d'un ensemble $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, dont les éléments sont appelés des ***noeuds*** ou des ***sommets*** ;

Si n = nombre d'éléments de X, G est un **graphe d'ordre n**

- d'un ensemble U dont les éléments u_i sont des couples de sommets (i = 1 à m)

Exemple : $u_i = (X_1, X_n)$

• Dans certaines situations, on distingue le 1er sommet du couple du 2nd sommet. Pour i ≠ j, (X_i, X_j) et (X_j, X_i) sont 2 éléments distincts de U.
=> les éléments de U s'appellent des ***arcs***, et le graphe est dit ***orienté,***

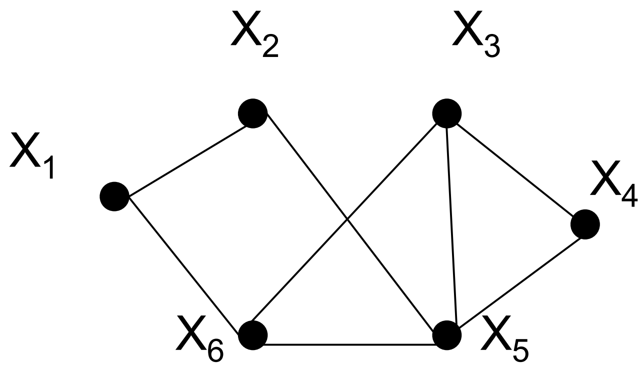
* Si la distinction entre (X_i, X_j) et (X_j, X_i) est inutile, alors les éléments de U sont des ***arêtes***, et le graphe est ***non-orienté***.

Représentation graphique :

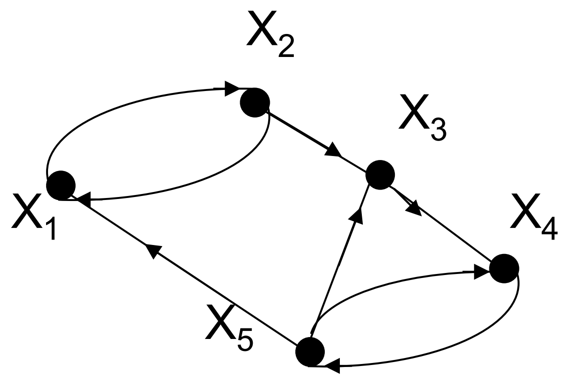
entité	représentation	graphe
un sommet X_i	un point	• X_i
une arête (X_i, X_j)	un trait liant 2 sommets	X_i •——• X_j
un arc (X_i, X_j)	un trait liant 2 sommets et orienté par une flèche	X_i •—→—• X_j

Exemple :

graphe non-orienté



graphe orienté

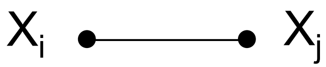


II.2.2 Extrémités d'un arc, d'une arête

<u>concept non-orienté</u>

* Soit une arête $u = (X_i, X_j)$

X_i et X_j sont les **extrémités** de u.

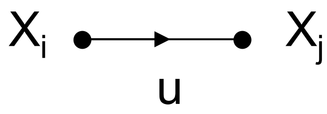


<u>concept orienté</u>

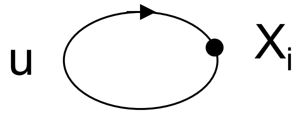
* Soit un arc $u = (X_i, X_j)$

X_i est l'**extrémité initiale** de u.

X_j est l'**extrémité finale** (**terminale**) de u.

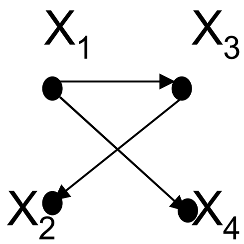


* Un arc $u = (X_i, X_i)$ dont les extrémités coïncident est appelé une <u>**boucle**</u>.



* Un sommet est **<u>incident</u>** à un arc (ou une arête), si ce sommet est une des extrémités de cet arc ou de cette arête.

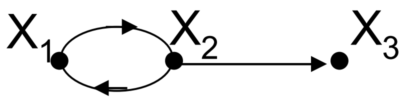
exemple : soit l'arc (X1, X3).



- X1 et X3 sont incidents à cet arc.
- X2 et X4 ne sont pas incidents à cet arc.

* Deux sommets d'un graphe Xi et Xj sont **<u>adjacents</u>** s'ils sont distincts et s'ils sont extrémités d'un même arc ou arête. : (Xi, Xj) ou (Xj, Xi).

exemple :

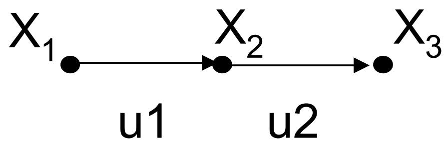


X1 et X2
X2 et X3 } sont adjacents.

X1 et X3
X1 et X1 } ne sont pas adjacents

* Deux arcs (ou arêtes) sont **<u>adjacents</u>** s'ils sont distincts et s’ils ont au moins une extrémité commune.

exemple :



Les arcs u_1 et u_2 sont adjacents

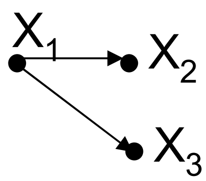
ou

Les arcs (X_1, X_2) et (X_2, X_3) sont adjacents

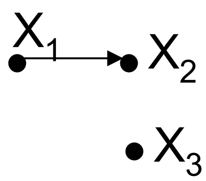
•G’ = (X’, U’) est un **graphe partiel** d’un graphe G=(X, U) si X = X’ et si U ⊃ U’, i.e. si les sommets de G et G’ sont identiques, et si les arcs ou arêtes de U’ sont tous des éléments de U

exemple :

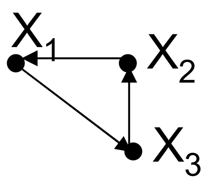
graphe G



graphe G1



graphe G2



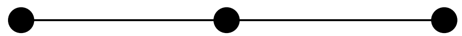
G1 est un graphe partiel de G

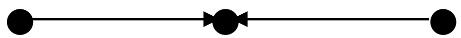
G2 n'est pas un graphe partiel de G

II.2.3 Chemins, chaînes, circuits, cycles

concept non-orienté

* ***Chaîne*** : c'est une séquence d'arcs (ou d'arêtes) consécutives : chaque arc possède **une extrémité commune** avec l'arc suivant.

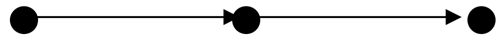


ou 

Une chaîne peut être désignée par les sommets ou par les arcs qui la constituent.

concept orienté

* ***Chemin*** : c'est une suite d'arcs telle que **l'extrémité finale** de chaque arc **coïncide avec l'extrémité initiale** de l'arc suivant.



Un chemin peut être désigné par les sommets ou par les arcs qui la constituent.

II.2.3 Chemins, chaînes, circuits, cycles

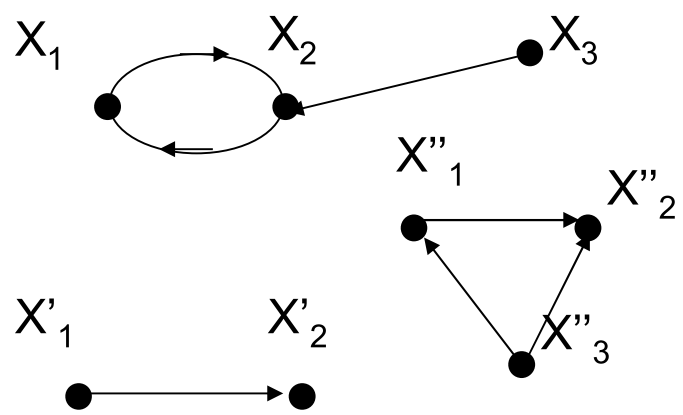
<u>concept non-orienté</u>	<u>concept orienté</u>
* ***Chaîne élémentaire*** : c'est une chaîne telle qu'en la parcourant, on ne rencontre pas 2 fois le même sommet	* ***Chemin élémentaire*** : chemin dont tous les sommets sont distincts.
* ***Cycle*** : chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues	* ***circuit*** : chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
* ***Cycle élémentaire*** : cycle dont tous les sommets sont distincts (sauf le sommet origine et extrémité du cycle).	* ***Circuit élémentaire*** : circuit dont tous les sommets sont distincts (sauf le sommet origine et extrémité du cycle).

II.2.4 Quelques propriétés élémentaires des graphes

<u>concept non-orienté</u>

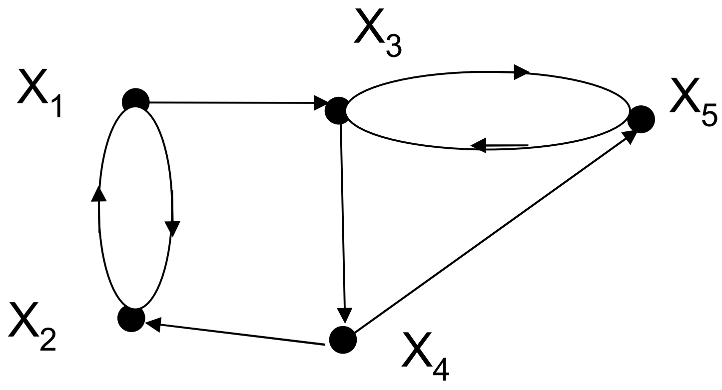
* un graphe est ***connexe*** si pour tout couple de sommet X_i et X_j , il existe une chaîne joignant X_i et X_j (ou si i=j).

exemples : 3 graphes connexes



<u>concept orienté</u>

* un graphe est ***fortement connexe*** si pour tout couple de sommet X_i et X_j (dans cet ordre), il existe un chemin d'extrémité initiale X_i et d'extrémité finale X_j (ou si i=j).

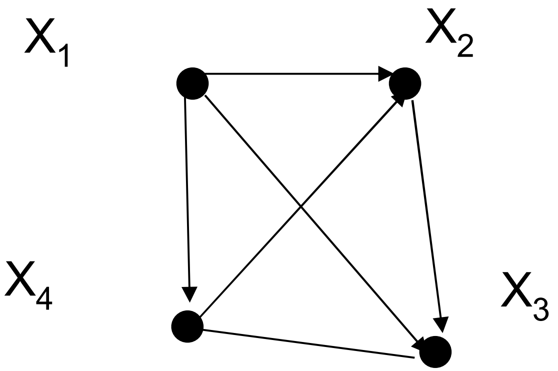


II.2.4 Quelques propriétés élémentaires des graphes

concept non-orienté

* un graphe est ***complet*** si pour tout couple de sommet Xi et Xj, il existe une arête entre Xi et Xj (il existe un arc (Xi, Xj) ou un arc (Xi, Xj)).

$$(X_i, X_j) \notin U \Rightarrow (X_j, X_i) \in U$$

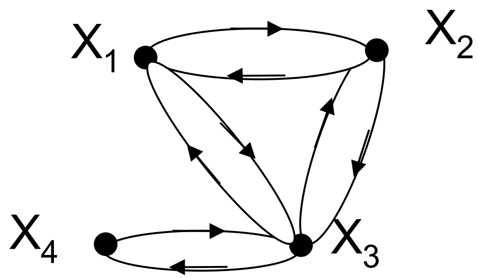


II.2.4 Quelques propriétés élémentaires des graphes

concept orienté

* un graphe est ***symétrique*** si pour tout couple de sommets Xi et Xj, il existe autant d'arcs de la forme (Xi, Xj) que d'arcs de la forme (Xj, Xi) :

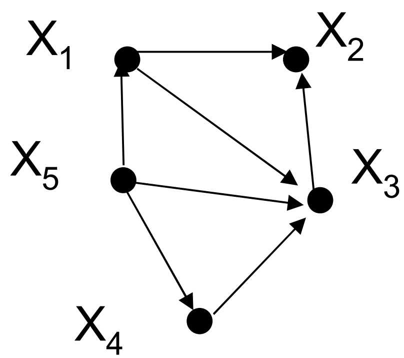
$$(Xi, Xj) \in U \Rightarrow (Xj, Xi) \in U$$



* un graphe est ***antisymétrique*** si pour tout couple de sommets Xi et Xj :

$$(Xi, Xj) \in U \Rightarrow (Xj, Xi) \in U$$

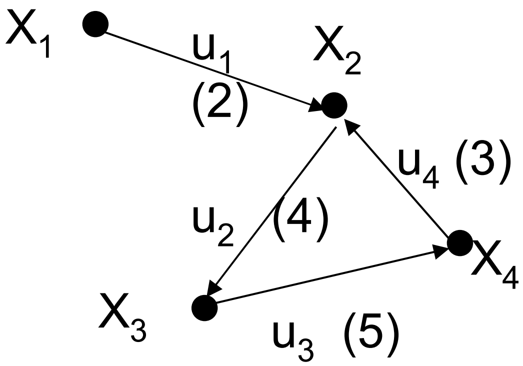
=> pas de boucle et un seul arc (au plus un)
par couple de sommets



II.2.5 Longueur d’un chemin ou circuit *(concept orienté)*

Etant donné un graphe G = (X, U), on associe à chaque arc u un nombre réel l(u) appelé "longueur de l'arc". On dit que G est ***valué*** par les longueurs l(u).

Soit un chemin noté C dans ce graphe. On appelle longueur de ce chemin et l'on note l(C) l'expression : $l(C) = \sum_{u \in C} l(u)$



$C = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_2)$
$= (u_1, u_2, u_3, u_4)$

l(C) = 14

=> exemples de problèmes :

recherche du plus court chemin entre 2 sommets.

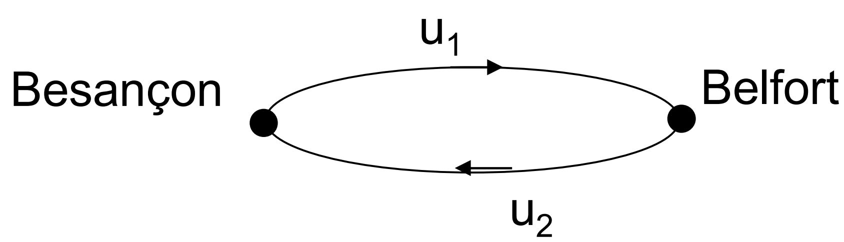
=> trouver C entre ces 2 sommets tel que $l(C)$ soit minimum

Ce problème a de nombreuses applications pratiques car la longueur $l(u)$ peut s'interpréter comme :

- un coût de transport sur l'arc u
- ou les dépenses de construction de l'arc u
  (construction de tronçons d'autoroute pour un coût donné)
- ou le temps nécessaire pour parcourir l'arc u

exemple : recherche du chemin le plus court entre 2 villes

ville	=	sommet
route	=	2 arcs d'orientation opposée et de longueur la distance à parcourir



$l(u_1) = l(u_2) = 100$ km

mais aussi : recherche du trajet le plus économique (nationale ou autoroute), le plus rapide…