Probabilités et Statistique, module M3201
DUT Informatique

Claire Wolfersperger

2021

Chapitre 1

Introduction et rappels sur les probabilités

1.1 Espace de probabilités

1.1.1 Univers et évènements

Dans tout ce chapitre Ω désigne un ensemble (fini ou infini) appelé **univers**. Les éléments de Ω sont appelés **issues** ou **éventualités** et les sous-ensembles de Ω des évènements.

Considérons par exemple $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ est un univers à deux issues/éléments. Les évènements sont $\emptyset$, $\{\text{pile}\}$, $\{\text{face}\}$ et Ω.

On peut aussi prendre $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$. Un évènement possible est alors *un nombre pair*, qui correspond au sous-ensemble $\{2, 4, 6\}$.

Comme les évènements sont des ensembles, on les combine souvent en utilisant les opérateurs booléens classiques sur les ensembles : union, intersection, complément.

Exercice 1 *On considère un univers Ω constitués d'étudiants de l'IUT. On considère les évènements suivants :*

— *A : Étudiants garçons.*
— *B : Étudiantes.*
— *C : En première année.*
— *D : En seconde année.*
— *E : En licence pro.*
— *F : Au département informatique.*
— *G : Au département carrières sociales.*

1. *Exprimer à l'aide des évènement ci-dessus et d'opérations ensemblistes, l'évènement* Une étudiante de licence pro.
2. *Même question avec* un ou une étudiante de première année.
3. *Même question avec* Une étudiante inscrite à la fois en première et seconde année.
4. *Même question avec* Une étudiante de DUT informatique ou de carrières sociales.

Exercice 2 *On considère un univers Ω constitués des 32 cartes classiques d'un jeu. On considère les évènements suivant :*

— *A : Rois*
— *B : Figures.*
— *C : Piques.*
— *D : Trèfle.*

Exprimer en français à quoi correspondent les évènements suivants :

1. $A \cup C$.
2. $A \cap C$.
3. $B \cap (C \cup D) \cap \overline{A}$.

1.1.2 Probabilités discrètes

Definition 3 *Une* **probabilité** *sur un univers Ω est une application $\mathbb{P}$ qui à chaque évènement associe un réel entre dans $[0, 1]$ telle que :*

— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
— *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie ou dénombrable (c'est-à-dire dont on peut compter les éléments) d'évènements deux à deux disjoints (c'est-à-dire que si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$), alors*

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Une probabilité est aussi appelée une **loi de probabilité** ou une **distribution de probabilité**, ou encore simplement une **distribution**.

Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé **espace de probabilités** ou **espace probabilisé**. Pour un évènement A, $\mathbb{P}(A)$ est appelée la probabilité que l'évènement A se produise.

Exercice 4 *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.*

1. *Que vaut $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset)$? en déduire la valeur de $\mathbb{P}(\emptyset)$.*
2. *Que vaut $\mathbb{P}(A \cup \overline{A})$, où A est un évènement quelconque ? En déduire une relation entre $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\overline{A})$.*
3. *On suppose que $A \subseteq B$. Que peut on dire de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$?*
4. *Exprimer $\mathbb{P}(A \cup B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.*

On a les propriété. suivantes

Proposition 5 *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.*

— $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
— *Pour tout évènement A, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$.*
— *Si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*
— *Pour tous évènements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.*

Definition 6 *Soit Ω un ensemble fini de cardinal n. On appelle* **distribution uniforme** *sur Ω, la probabilité qui vérifie $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{1}{n}$ pour tout x dans Ω.*

Avec la distribution uniforme, lors d'une expérience, chaque issue à la même chance d'être tirée au sort. C'est le cas classique du dé ou de la pièce non truquée.

Soit $\mathbb{P}$ une loi uniforme sur Ω fini de cardinal n. Alors, pour tout évènement A, on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{n}$.

Exercice 7 *On considère un jeu de cartes, avec Ω l'ensemble des 32 cartes. On munit cet univers de la distribution uniforme $\mathbb{P}$, chaque carte ayant la même probabilité de sortir.*

1. *Considérons l'évènement A : « La carte tirée est un trèfle ». Quelle est la probabilité de cet évènement ?*
2. *Donner le complémentaire de l'évènement A ci-dessus. Quelle est sa probabilité ?*
3. *Considérons l'évènement B : « La carte tirée est un roi ». Quelle est la probabilité de cet évènement ?*
4. *Considérons l'évènement C : « La carte tirée est le roi de trèfle ». Quelle est la probabilité de cet évènement ?*
5. *On considère l'évènement D : « La carte tirée est un roi ou un trèfle ». Quelle est la probabilité de cet évènement ?*

1.2 Probabilités discrètes uniformes et combinatoire

Exercice 8 *On considère un sac contenant dix balles numérotées de 1 à 10, deux sont rouges, et huit sont bleues (les couleurs ne sont pas utilisées dans cette exercice, mais le seront plus tard).*

1. *On considère l'expérience qui consiste à tirer au sort une balle sans regarder. Quel est l'univers ?*
2. *Cette fois ci l'expérience consiste à tirer une balle, puis la remettre dans le paquet, puis après avoir mélanger, à retirer une balle. Quel est l'univers ?*
3. *Maintenant, on tire une balle, puis une autre sans remettre la première dans le sac. Quel est l'univers ?*
4. *On tire maintenant deux balles à la fois. Quel est l'univers ?*
5. *Enfin, même question avec : on tire une balle, on la remet, puis on tire deux balles à la fois.*

On voit qu'il n'est pas toujours simple d'exprimer l'univers lorsque l'on fait plusieurs manipulations. Dans le cas de la loi uniforme, on peut utiliser la formule $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{n}$ vue à la fin de la section précédente, pour transformer une problème de probabilité en un problème de comptage. Il suffit ce compter le nombre d'éléments de l'univers et le nombre d'éléments de l'événement. Pour cela, on utilise différentes techniques combinatoires :

Definition 9 *Soit n et k deux entiers positifs vérifiant $k \leq n$. On a*

— *Factoriel n est défini par : $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1$,*
— *Le nombre d'arrangements de k objets parmi n est*

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

— *Le nombre de combinaisons de k objets parmi n est*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Proposition 10 *Soit n et k deux entiers positifs vérifiant $k \leq n$.*

- *Il y a $n!$ façon d'ordonner les n objets.*
- *Il y a A_n^k façon d'ordonner k objets parmi les n objets.*
- *Il y a $\binom{n}{k}$ façon de choisir k objets parmi les n objets.*

Par ailleurs, si A et B sont deux ensembles finis, alors $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Reprenons l'exemple de l'exercice 8 et calculons la taille de l'univers à chaque fois.

1. La taille de l'univers est 10.
2. Ici, on tire deux balles avec remises, la taille de l'univers est donc $10 \times 10 = 100$.
3. Ici on choisit, de façon ordonné, deux balles parmi 10. Il y a donc $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$ possibilités.
4. Ici on choisit, sans ordre, deux éléments. Il y a donc $\binom{10}{2} = (10 \times 9)/2 = 45$ possibilités.
5. Ici on choisit d'abord une balle, puis on la remets, puis on en tire 2. Pour la première balle il y a 10 possibilités, puis pour les deux autres 45. Au total il y a 450 possibilités.

Exercice 11 *Un classe comporte 14 étudiants.*

1. *On souhaite choisir deux délégués pour cette classe. Combien y a-t-il de possibilités ?*
2. *On souhaite choisir un délégué et un délégué suppléant pour cette classe. Combien y a-t-il de possibilités ?*
3. *Une salle machine comporte 14 places, combien y a-t-il de façon d'y placer les étudiants ?*
4. *Une salle machine comporte 16 places, combien y a-t-il de façon d'y placer les étudiants ?*
5. *On souhaite effectuer des projets par binômes. Combien de façon y-a-t-il de constituer 7 binômes ?*

Exercice 12 *On considère un groupe de 23 personnes sélectionnée pour faire partie d'une équipe de football, qui contient 11 joueurs.*

1. *Combien d'équipes différentes peut-on faire ?*
2. *Sachant qu'il faut un gardien par équipe et qu'il y en a 3 parmi les 23 personnes, combien y a-t-il de possibilités de constituer une équipe ?*
3. *Parmi les 23 joueurs, il y a 3 gardiens, 6 attaquants, 6 milieux de terrain et 8 arrières ? Un équipe est composée d'un gardien et 4 défenseurs. Il y a ensuite soit 3 milieux et 3 attaquants, soit 4 milieux et 2 attaquants. Combien y a-t-il de possibilités de constituer une équipe ?*

Exercice 13 *On considère l'évènement A : avoir au moins une balle rouge. Pour chaque cas de l'exercice 8, calculer la probabilité de A (on pourra décomposer A en évènements disjoints). Même question avec l'évènement : avoir exactement une balle bleue.*

Exercice 14 *On considère un jeu de 32 cartes classique. Une main est un ensemble (non ordonné) de cinq cartes du jeu.*

1. *Combien y a-t-il de mains possibles ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'une main contiennent les 4 as ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'une main contiennent l'as de pique ?*
4. *Quelle est la probabilité qu'une main contiennent au moins un as ?*

1.3 Indépendance et probabilités conditionnelles

1.3.1 Évènements indépendants

Definition 15 *Deux évènements A et B sont* **indépendants** *si $\mathbb{P}(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Par exemple, si l'on lance deux fois de suite un dé à 6 faces et que l'on considère les trois évènements A : *le premier lancé est pair*, B : *le second lancé est pair* et C : *le premier lancé est 4*. On a $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$, donc A et B sont indépendants. Mais $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{6}$, donc A et C ne sont pas indépendants.

Exercice 16 *En utilisant la proposition 5, si A et B sont indépendants, que vaut $\mathbb{P}(A \cup \mathcal{B})$? En lançant deux dés à la suite, quelle est la probabilité que l'un des deux au moins soit pair ?*

1.3.2 Probabilités conditionnelles et Formule de Bayes

Definition 17 *Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On définit la probabilité de A sachant B, noté $\mathbb{P}(A \mid B)$, par :*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prenons par exemple un dé à 6 face que l'on lance une fois, avec les évènements A : *nombre pair* et B : *on obtient un* 4. On a $\mathbb{P}(A \mid B)$ qui est la probabilité d'obtenir un nombre pair si l'on a obtenu un 4. Sans surprise $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/6} = 1$. Maintenant $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$. La probabilité d'obtenir un 4 si l'on sait que l'on a obtenu un nombre pair est de une sur trois.

Exercice 18 *On considère une classe, dans laquelle il y a des filles et des garçons, avec ou sans lunettes. On sait que 20% de cette classe exactement sont des filles avec des lunettes. On sait aussi qu'une personne sur deux porte des lunettes. Si on tire au sort une personne qui a des lunettes, quelle est la probabilité que cela soit une fille ? (on pourra utiliser l'évènement A être une fille et l'évènement B avoir des lunettes).*

Exercice 19

1. *Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Exprimer $\mathbb{P}(B \mid A)$ en fonction de $\mathbb{P}(A \mid B)$, de $\mathbb{P}(A)$ et de $\mathbb{P}(B)$.*
2. *On considère une salle contenant des individus, filles ou garçons, étudiants ou enseignants. Il y a 10% d'enseignants et, parmi les étudiants, 20% de filles. Si l'on choisit une fille au sort, quelle est la probabilité qu'elle soit une étudiante ? (sachant qu'il y a au total 25% de filles).*

Exercice 20 *On considère un sac contenant des objets qui peuvent être bleus ou rouges, cubiques ou sphériques. On sait qu'il y a un tiers d'objets cubiques et un quart d'objets rouges. Par ailleurs, s'il l'on choisit un objet cubique, il y a une chance sur 3 qu'il soit rouge. Si l'on choisit un objet rouge, quelle est la probabilité qu'il soit cubique ?*

Definition 21 *Soient A_1, A_2, …, A_k des évènements. On dit qu'ils forment une partition de l'univers s'ils sont tous non vides et qu'ils sont deux-à-deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et qu'ils recouvrent tout l'univers ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$).*

Considérons le tirage au sort d'une carte dans un jeu classique de 32 cartes. Les évènements *tirer un coeur*, *tirer un trèfle*, *tirer un carreau* et *tirer un pique* forment une partition de l'univers : chaque carte à au moins une couleur (recouvrement), au plus une couleur (deux-à-deux disjoints) et il y a au moins une carte dans chaque couleur (évènement non vide). Notons qu'ici, avec une tirage non biaisé les évènements sont équiprobables, mais ça n'est pas demandé par la définition. Par exemple, les deux évènements *tirer une figure* et *tirer un nombre* forment aussi une partition de l'univers.

Exercice 22
On considère l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Est-ce que $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ forme une partition ? Pourquoi ?
2. Est-ce que $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$ forme une partition ? Pourquoi ?
3. Est-ce que $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$ forme une partition ? Pourquoi ?
4. Donner deux exemples de partitions.

Le résultat suivant s'appelle formule des probabilités totales.

Proposition 23 *Soient A_1, A_2, …, A_k des évènements formant une partition des évènements de l'univers. Pour tout événement B, on a*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \ldots \mathbb{P}(B \cap A_k),$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \ldots \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k).$$

Un frigidaire contient des yaourts qui sont à la fraise, à la poire ou à l'abricot. Certains yaourts sont mixés, les autres contiennent des morceaux de fruits. On sait qu'un tiers des yaourts à la fraise sont mixés, un quart de ceux à la poire le sont et la moitiés de ceux à l'abricot. La moitié des yaourts sont à la fraise et un quart à la poire. Quelle est la probabilité, si l'on prend un yaourt au hasard, d'avoir un yaourt mixé ? On pose F, P et A les évènements pour des yaourts d'être *à la fraise*, *à la poire* et *l'abricot*. On note M la probabilité qu'un yaourt soit mixé. On a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(M \mid F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(M \mid P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(M \mid A)\mathbb{P}(A) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{17}{48} \simeq 0.354\end{aligned}$$

Environ 35% des yaourts sont mixés.

On peut réécrire la formule des probabilités totale sous une autre forme, appelée *formule de Bayes*.

Proposition 24 *Soient A_1, A_2, …, A_k des évènements formant une partition des évènements de l'univers et B un évènement quelconque. On a*

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \ldots \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

En reprenant l'exemple ci-dessus des yaourts, la probabilité qu'un yaourt soit à la fraise, sachant que c'est un yaourt mixé vaut

$$\mathbb{P}(F \mid M) = \frac{\mathbb{P}(M \mid F)\mathbb{P}(F)}{\frac{17}{48}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{8}{17}.$$

Exercice 25 *En reprenant les données de l'exemple des yaourts, calculer la probabilité qu'un yaourt soit à l'abricot sachant qu'il est mixé.*

Exercice 26 *On considère une population qui contient 20% d'enfants, 40% d'hommes adultes et 40% de femmes adultes. On observe que 10% des enfants sont malades, 15% des femmes adultes et 20% des hommes adultes.*

1. *On définit les évènements E être un enfant, F être une femme adulte, H être un homme adulte et M être malade. Lesquels forment une partition ?*
2. *Donner les valeurs de $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(M \mid E)$, $\mathbb{P}(M \mid H)$, $\mathbb{P}(M \mid F)$.*
3. *Que vaut $\mathbb{P}(M)$?*
4. *Que valent $\mathbb{P}(E \mid M)$, $\mathbb{P}(F \mid M)$ et $\mathbb{P}(H \mid M)$?*

Exercice 27 *On considère un programme écrit en commun par Alice et Bob. Alice a écrit 60 % du programme et Bob le reste. De plus 5% des lignes écrites par Alice ont un beug, et 10% de celle écrites par Bob. Si l'on tire au sort un ligne contenant une erreure, quelle est la probabilité qu'elle ait été écrite par Bob ?*

Exercice 28 *On considère un groupe de sportifs, contenant des hommes (événement H) et des femmes (événement F), des joueurs/joueuses de tennis (événement T), des joueurs/joueuses de basket (événement B) et des pratiquant(e)s du judo (événement J). On suppose que chacun pratique un et un seul de ces trois sport. On choisit au sort uniformément une personne du groupe.*

1. *On suppose que $\mathbb{P}(J) = \frac{13}{36}$ et $\mathbb{P}(T) = \frac{5}{12}$. Que vaut $\mathbb{P}(B)$?*
2. *On sait que $\frac{3}{13}$-ième des judokas sont des hommes, un tiers des joueurs de tennis sont des hommes et qu'il y a autant de joueurs de basket que de joueuses de basket. Que vaut $\mathbb{P}(B \mid H)$?*