

## Examen 2 Probabilités et Statistiques - S3 - 2021

Les calculatrices, ordinateurs, PDA, téléphones,... sont interdits.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

La présentation et la rédaction sont des éléments d'appréciation des réponses.

---

### Exercice 1 :

- 1) Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?
- 2) Qu'est-ce que l'espérance d'une variable aléatoire ?
- 3) Quand dit-on que deux variables aléatoires sont indépendantes ?
- 4) Si  $X$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètres  $p$  et  $n$ , donner  $P(X = k)$ .
- 5) Si  $X$  est une variable aléatoire géométrique de paramètre  $p$ , donner  $P(X = n)$ .

### Exercice 2 :

On considère que l'on a un dé équilibré à 6 faces.

Une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2, 2 faces portent le numéro 3 et la dernière le numéro 7.

- 1) On considère la variable aléatoire  $X$  qui donne le numéro affiché lors du lancé d'un dé. Que vaut  $E[X]$  ?  $var(X)$  ?
- 2) On lance deux fois le dé et on fait la somme  $Y$  des numéros obtenus. Que vaut  $E[Y]$  ?  $var(Y)$  ?
- 3) On lance deux fois le dé et on regarde le maximum  $Z$  des numéros obtenus. Que vaut  $E[Z]$  ?  $var(Z)$  ?
- 4) On lance  $n$  fois le dé et on calcule la somme  $S$  des numéros obtenus. Que vaut  $E[S]$  ? Justifier.
- 5) En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de  $\mathbb{P}(S \geq 4n)$ .
- 6) Que  $var(S)$  ?
- 7) En utilisant l'inégalité de Tchebychev, donner une majoration de  $\mathbb{P}(S \geq 4n)$ .
- 8) On lance trois fois le dé et on multiplie les résultats pour obtenir  $T$ . Que vaut  $E[T]$  ?

### Exercice 3 :

On lance un dé équilibré à 10 faces, numérotées de 1 à 10. On considère la variable aléatoire  $X$  qui prend la valeur 1 si la face obtenue est 5, et 0 sinon.

- 1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire  $X$  ? Préciser son paramètre.
- 2) Pour la suite de cet exercice, on lance  $n$  fois le dé. On considère la variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de 5 obtenus sur ces  $n$  lancers. Quelle est la loi suivie par  $Y$  ? Préciser les paramètres.
- 3) Donner  $E[Y]$  et  $var(Y)$ .
- 4) On considère la variable aléatoire  $Z$  qui compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 5. Quelle est la loi suivie par  $Z$  ? Préciser son paramètre.
- 5) Combien faut-il lancer de fois ce dé pour espérer obtenir 5 ?

### Exercice 4 :

Lors d'un discours au cours duquel il a donné les résultats des examens de fin d'études de deux universités du pays, le dictateur dirigeant ce pays a déclaré :

« Dans l'Université du Nord, 82% des garçons et 80% des filles ont réussi. Dans l'Université du Sud, 56% des garçons et 52% des filles ont réussi. Je ne suis pas sexiste, mais il faut bien reconnaître que dans notre pays, les garçons réussissent mieux que les filles. »

Dans l'Université du Nord, il y avait 1000 candidats dont la moitié de filles.

Dans celle du Sud, il y avait également 1000 candidats mais seulement un cinquième de filles.

Que dire de l'affirmation de ce dirigeant ?