Corrigé examen Probabilités et Statistiques 2020

Exercice 1 :

1) Une **probabilité** sur un univers Ω est une application $\mathbb{P}$ qui à chaque évènement associe un réel entre dans $[0, 1]$ telle que :
   - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
   - Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable (c'est-à-dire dont on peut compter les éléments) d'évènements deux à deux disjoints (c'est-à-dire que si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$), alors
$$\mathbb{P}(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$
2) Si k et n sont deux entiers positifs tels que $k \leqslant n$, le nombre d'**arrangements** de k objets parmi n est $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
3) Deux évènements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = P(A)P(B)$.
4) Les événements $A_1, A_2, \dots, A_k$ forment une **partition** de l'univers s'ils sont tous non vides et qu'ils sont deux-à-deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et qu'ils recouvrent tout l'univers ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$).

Exercice 2 :

1) *Un joueur de foot, fille ou garçon, droitier.* : $A \cap F$.
2) *Un joueur de foot garçon qui ne joue pas au tennis* : $A \cap E \cap \overline{B}$.
3) *Une joueuse de handball gauchère ou un garçon qui joue au tennis* : $(D \cap C \cap G) \cup (E \cap B)$.
4) $(D \cap F \cap A) \cup C$: Une joueuse de foot droitière ou un joueur de handball.

Exercice 3 :

1) $\mathbb{P}(\{6\}) = 1 - 0,2 - 0,15 - 0,1 - 0,4 - 0,05 = 0,1$.
2) $\mathbb{P}(\{10\}) = 0$ car on ne peut pas obtenir 10 avec le dé.
3) $E = \{1; 3; 5\}$ et $F = \{1; 2; 3; 6\}$.
4) $\mathbb{P}(E) = 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,35$, $\mathbb{P}(F) = 0,2 + 0,15 + 0,1 + 0,1 = 0,55$ et $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(\{1; 3\}) = 0,2 + 0,1 = 0,3$.
5) $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = 1 - 0,35 = 0,65$ et $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F) = 0,35 + 0,55 - 0,3 = 0,6$.

Exercice 4 :

Cas 2 enfants : On a : $A = \{(F, G); (G, F)\}$ et $B = \{(G, G); (F, G); (G, F)\}$.
Donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\mathbb{P}(B) = \dfrac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Comme $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A \cap B)$, les événements A et B ne sont pas indépendants.
Cas 3 enfants : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$; $\mathbb{P}(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$. Comme $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$, les événements A et B sont indépendants.
Généralisation à n enfants : $\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{2}{2^n}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{n}{2^n}$.
On a $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ uniquement si $n = 3$.

Exercice 5 :

1) a. Il y a $15 \times 15 = 225$ tirages possibles.
   b. $225 - 10 \times 10 = 125$ tirages donnent au moins une boule blanche.
2) a. Il y a $\dbinom{15}{5}$ tirages possibles.
   b. Il y a $\dbinom{5}{2} \times \dbinom{10}{3}$ tirages qui donnent 2 boules blanches et 3 boules noires.
3) a. Il y a A_{15}^5 tirages possibles.
   b. Il y a $5!\dbinom{5}{2} \times \dbinom{10}{3}$ tirages qui donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque.

Exercice 6 :

1) La probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance est $\mathbb{P}(A \cap S) = \mathbb{P}(S|A) \times \mathbb{P}(A) = 0,8 \times 0,25 = \frac{8}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{10} = 0,2$.
2) La probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(B \cap S) + \mathbb{P}(C \cap S) = \mathbb{P}(S|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(S|B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(S|C) \times \mathbb{P}(C) = 0,2 + 0,9 \times 0,5 + 0,75 \times 0,25 = \frac{2}{10} + \frac{45}{100} + \frac{3}{16} = \frac{16+36+15}{80} = \frac{67}{80} = 0,8375$.
3) La probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur de la marque Celt sachant que cet employé est satisfait du service de maintenance est
$\mathbb{P}(C|S) = \frac{\mathbb{P}(C \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S|C) \times \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0,25 \times 0,75}{0,8375} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{67}{80}} = \frac{15}{67}$