# 2. Programmation linéaire

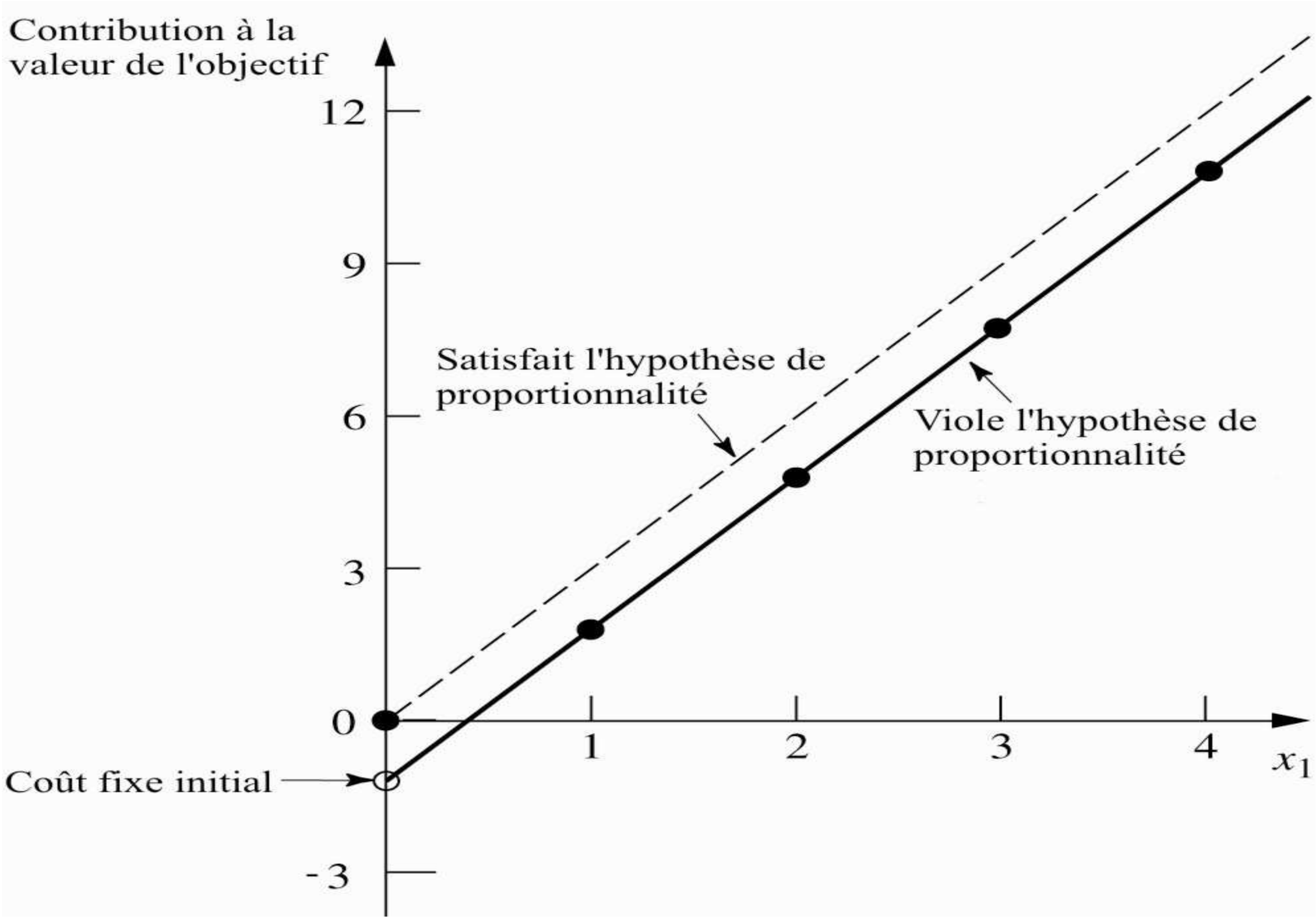
a. Modélisation

b. Méthode du simplexe

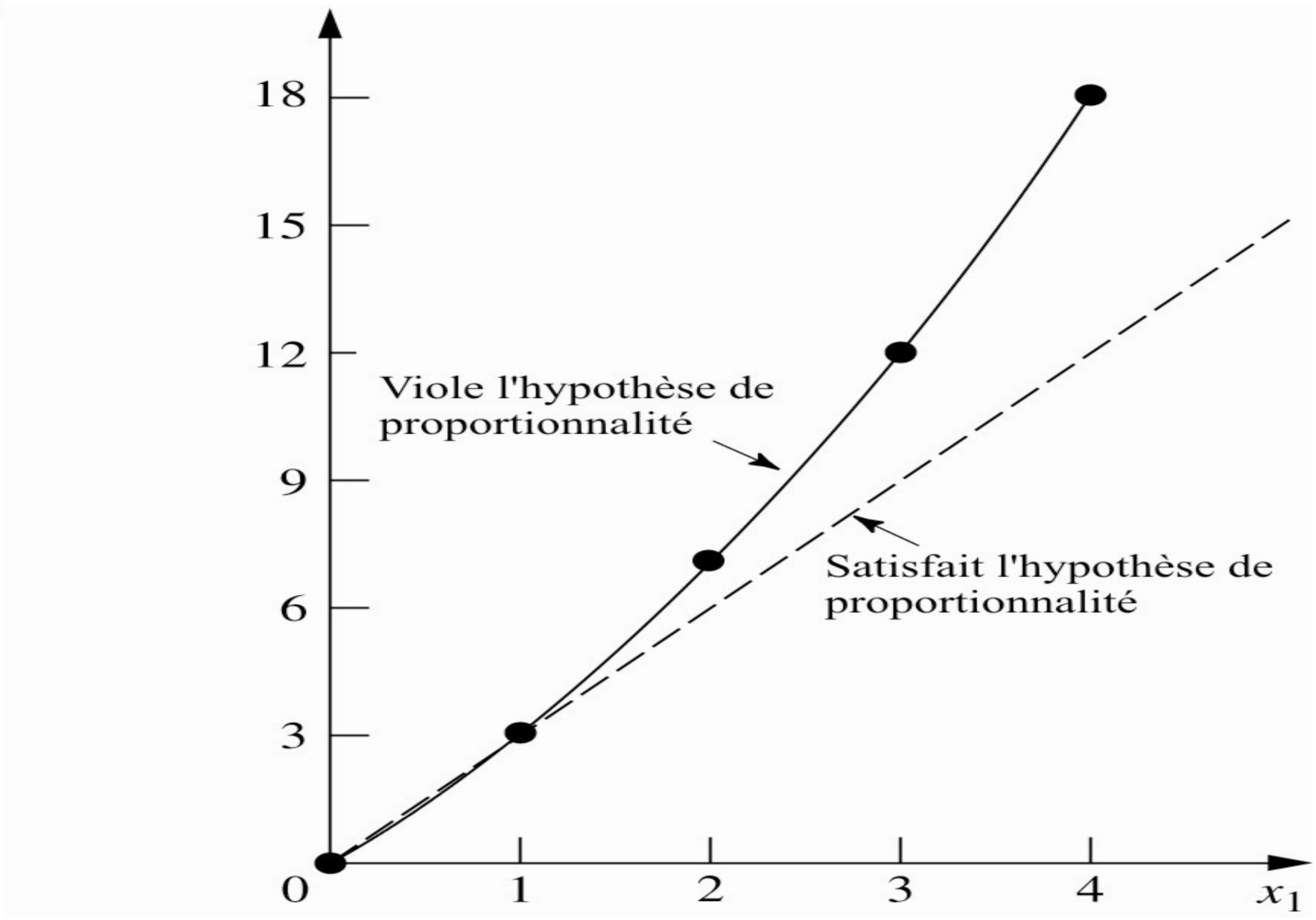
# Hypothèses du modèle de PL

- *Proportionnalité* :
  - La contribution de chaque activité (variable) à la valeur de la fonction objectif est proportionnelle au niveau de cette activité (à la valeur de cette variable)
  - La contribution de chaque activité au terme de gauche de chaque contrainte fonctionnelle est proportionnelle au niveau de cette activité
- Cas où cette hypothèse n'est pas satisfaite:
  - Coût fixe initial
  - Profit marginal (profit par unité) croissant
  - Profit marginal (profit par unité) décroissant

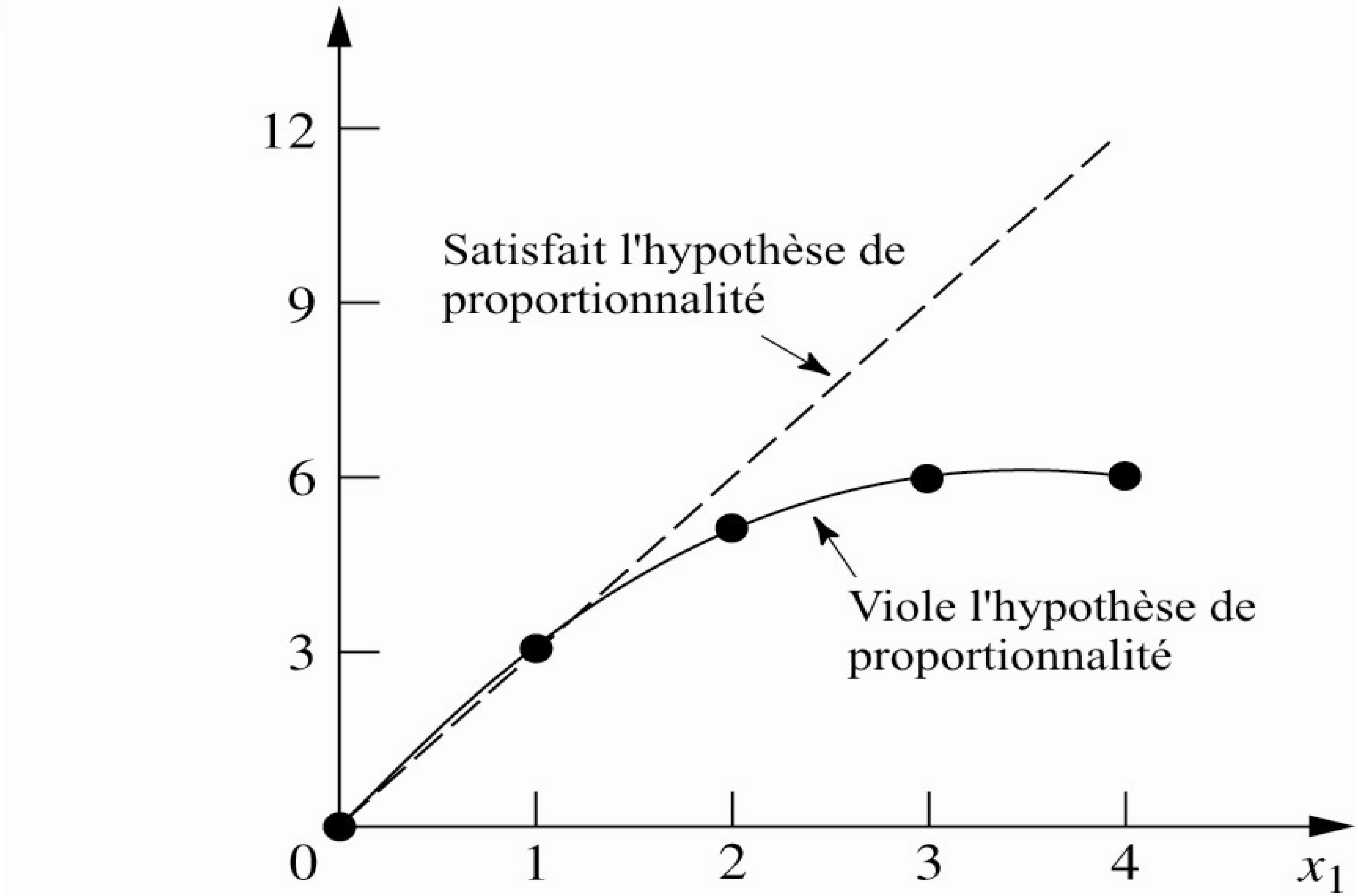
# Coût fixe initial



# Profit marginal croissant



# Profit marginal décroissant



# Hypothèses du modèle de PL (suite)

- *Additivité* :
  - La fonction objectif est composée de la somme des contributions individuelles de chaque activité
  - Le terme de gauche de chaque contrainte fonctionnelle est composé de la somme des contributions individuelles de chaque activité
- L'additivité interdit les termes de la forme $x_1 x_2$
- La proportionnalité interdisait déjà les termes de la forme $x^L$ $L>1$
- Dans ces deux cas, nous avons un modèle de *programmation non linéaire* (voir Section 7)

# Hypothèses du modèle de PL (suite)

- *Divisibilité* : chaque variable de décision peut prendre des valeurs non entières
- Dans l'exemple *Wyndor Glass*, chaque variable représente un nombre de lots de chaque produit et nous admettons des *fractions de lots*
- Si nous imposons des variables à valeurs entières, nous obtenons un modèle de *programmation en nombres entiers* (voir Section 4)

# Hypothèses du modèle de PL (suite)

- *Certitude* : les valeurs affectées à chaque paramètre sont des constantes connues avec certitude
- Rappelons que le modèle est une représentation idéalisée du problème: cette hypothèse peut être fort éloignée de la réalité!
- Que faire dans ce cas?
  - *Analyse de sensibilité* : vérifier la sensibilité du modèle à des changements de valeurs des paramètres
  - Introduction de *variables aléatoires* (voir Section 5)

# Exemple 1: horaire de personnel

- Chaque jour est divisé en *périodes*
- On a pu estimer un nombre minimum d'employés (MinEmp) devant être affectés durant chaque période
- Chaque jour est divisé en *quarts de travail* de 8 heures
- Plusieurs quarts partagent une même période
- Chaque quart de travail exige un salaire particulier
- Combien d'employés doit-on affecter à chaque quart de travail de façon à minimiser le total des salaires versés, en respectant le nombre minimum d'employés pour chaque période ?

# Exemple 1: données du problème

| Période | Quart 1 | Quart 2 | Quart 3 | Quart 4 | Quart 5 | MinEmp |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6-8 | × | | | | | 48 |
| 8-10 | × | × | | | | 79 |
| 10-12 | × | × | | | | 65 |
| 12-14 | × | × | × | | | 87 |
| 14-16 | | × | × | | | 64 |
| 16-18 | | | × | × | | 73 |
| 18-20 | | | × | × | | 82 |
| 20-22 | | | | × | | 43 |
| 22-24 | | | | × | × | 52 |
| 0-6 | | | | | × | 15 |
| Salaire | 170 | 160 | 175 | 180 | 195 | |

# Exemple 1: modèle

- $x_j =$ nombre d'employés affectés au quart $j$
- Objectif:

  Minimiser $Z = 170\, x_1 + 160\, x_2 + 175\, x_3 + 180\, x_4 + 195\, x_5$
- Pour chaque période, le nombre d'employés affectés aux différents quarts doit couvrir le minimum d'employés requis pour cette période
- Exemple, période de 14h à 16h:

  $X_2 + x_3 \geq 64$

# Exemple 1: modèle détaillé

Minimiser $Z = 170 x_1 + 160 x_2 + 175 x_3 + 180 x_4 + 195 x_5$

$$x_1 \geq 48$$

$$x_1 + x_2 \geq 79$$

$$x_1 + x_2 \geq 65$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 87$$

$$x_2 + x_3 \geq 64$$

$$x_3 + x_4 \geq 73$$

$$x_3 + x_4 \geq 82$$

$$x_4 \geq 43$$

$$x_4 + x_5 \geq 52$$

$$x_5 \geq 15$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5$$

# Exemple 1: conclusions

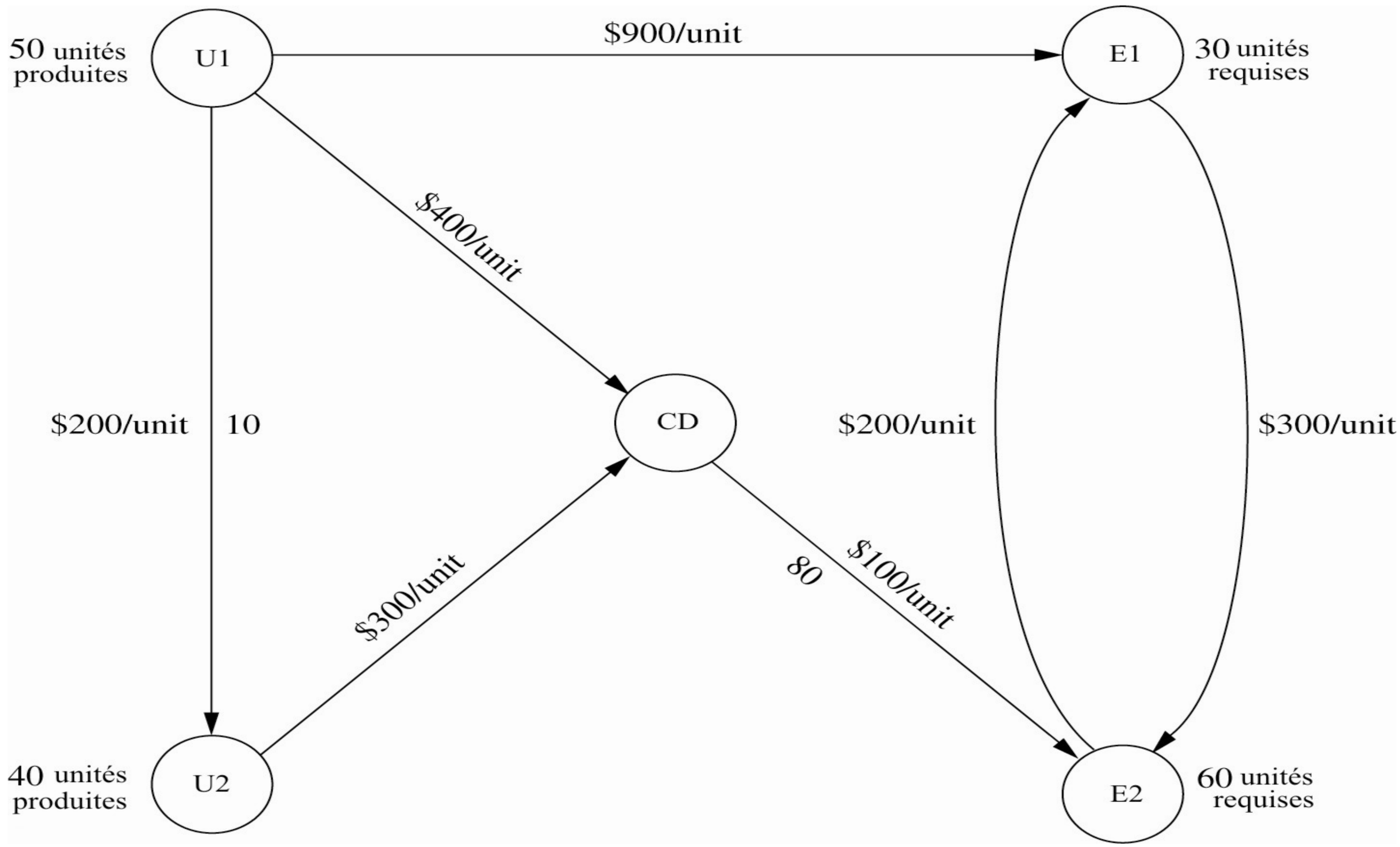
- $x_1 + x_2 \geq 79 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 65$ : cette dernière contrainte est donc *redondante* et peut être éliminée
- $x_3 + x_4 \geq 82 \Rightarrow x_3 + x_4 \geq 73$ : même observation avec cette contrainte
- $x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ sont aussi redondantes mais il n'y a aucun intérêt à les éliminer
- Solution optimale (obtenue par *Excel Solver*, voir Spreadsheets\Chapter 3\Union Airways.xls):

  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (48, 31, 39, 43, 15)$
- *Problème*: le nombre d'employés doit toujours être entier, donc l'hypothèse de divisibilité n'est pas satisfaite dans le modèle (bien que la solution optimale *dans ce cas particulier* soit entière)

# Exemple 2: réseau de distribution

- Deux usines (U1,U2)
- Un centre de distribution (CD)
- Deux entrepôts (E1,E2)
- Chaque usine manufacture un certain nombre d'unités d'un même produit (*offre*)
- Chaque entrepôt requiert un certain nombre d'unités de ce même produit (*demande*)
- Sur chaque lien (*arc*) du réseau, il y a un coût de transport par unité de produit (*coût unitaire*)
- Sur certains arcs, il y a une *capacité* sur le nombre d'unités transportées
- Objectif: minimiser le coût de transport total

# Exemple 2: données du problème



# Exemple 2: modèle

- $x_{i,j}$ = nombre d'unités du produit transportées sur l'arc *(i,j)* (entre les *sommets i* et *j*)
- Objectif (en centaines de $):
  Min $Z = 2\,x_{U1,U2} + 4\,x_{U1,CD} + 9\,x_{U1,E1} + 3\,x_{U2,CD} + x_{CD,E2} + 3\,x_{E1,E2} + 2\,x_{E2,E1}$
- *Conservation du flot*: en chaque sommet du réseau, flot sortant – flot entrant =
  - nombre d'unités produites (usine)
  - -nombre d'unités requises (entrepôt)
  - 0 (CD)
- Capacité (sur certains arcs)
  - Exemple, pour l'arc ($U_1$,$U_2$): $x_{U1,U2} \leq 10$
- Contraintes de non négativité

# Exemple 2 : modèle détaillé

Min $Z = 2\,x_{U1,U2} + 4\,x_{U1,CD} + 9\,x_{U1,E1} + 3\,x_{U2,CD} + x_{CD,E2} + 3\,x_{E1,E2} + 2x_{E2,E1}$

sous les contraintes:

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
x_{U1,U2} & + x_{U1,CD} & + x_{U1,E1} & & & & & = & 50 \\
-x_{U1,U2} & & & + x_{U2,CD} & & & & = & 40 \\
& - x_{U1,CD} & & - x_{U2,CD} & + x_{CD,E2} & & & = & 0 \\
& & - x_{U1,E1} & & & + x_{E1,E2} & - x_{E2,E1} & = & -30 \\
& & & & - x_{CD,E2} & - x_{E1,E2} & + x_{E2,E1} & = & -60
\end{array}
$$

$x_{U1,U2} \leq 10, \quad x_{CD,E2} \leq 80$

$x_{U1,U2} \geq 0,\ x_{U1,CD} \geq 0,\ x_{U1,E1} \geq 0,\ x_{U2,CD} \geq 0,\ x_{CD,E2} \geq 0$

$x_{E1,E2} \geq 0,\ x_{E2,E1} \geq 0$

# Exemple 2: conclusions

- Modéliser et résoudre avec Excel Solver
- C'est un problème de *flot à coût minimum* (voir Section 3; autre exemple: *Worked Examples* chap. 3)
- Solution optimale:

  $(x_{U1,U2}, x_{U1,CD}, x_{U1,E1}, x_{U2,CD}, x_{CD,E2}, x_{E1,E2}, x_{E2,E1}) = (0,40,10,40,80,0,20)$
- Le nombre d'unités transportées doit toujours être une valeur entière, donc l'hypothèse de divisibilité n'est pas satisfaite dans ce modèle
- Dans ce cas particulier, la solution est entière
- En fait, pour *tout* problème de flot à coût minimum (avec paramètres à valeurs entières), il existe *toujours* une solution optimale entière

# Exemple 3: problème de mélange

- Quatre matériaux de base (1,2,3,4)
- Trois types de mélange (A,B,C)
- Pour chaque type de mélange:
  - Profit/livre = prix de vente/livre - coût de production/livre
  - Contraintes de composition (exemple, dans le mélange B: pas plus de 50% du matériau 1; pas moins de 10% de matériau 2; exactement 10% du matériau 4)
- Pour chaque matériau:
  - Limite sur le nombre de livres disponibles/semaine
  - Coût de traitement/livre
  - Au moins la moitié de la limite disponible doit être traitée
- Coût de traitement total = 30 000 $/semaine
- Objectif: maximiser le profit total/semaine

# Exemple 3: premier modèle

- $y_i$ = nombre de livres/semaine du type de mélange *i*
- $z_{ij}$ = proportion du matériau *j* dans le mélange *i*
- Avec ces variables, il est facile de modéliser l'objectif et les contraintes de composition
- Mais qu'en est-il des contraintes de limite sur le nombre de livres disponibles de chaque matériau?
- Nombre de livres du matériau *j* par semaine:

  $z_{Aj}\, y_A + z_{Bj}\, y_B + z_{Cj}\, y_C$
- Limite de 3 000 livres du matériau 1 par semaine:

  $z_{A1}\, y_A + z_{B1}\, y_B + z_{C1}\, y_C \leq 3000$
- *Problème* : fonction non linéaire (hypothèse d'additivité violée)

# Exemple 3: deuxième modèle

- $x_{ij}$ = nombre de livres/semaine du matériau $j$ entrant dans la composition du type de mélange $i$
- Nombre de livres du matériau $j$ par semaine:
  $x_{Aj} + x_{Bj} + x_{Cj}$
- Nombre de livres du mélange $i$ par semaine:
  $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}$
- Proportion du matériau $j$ dans le mélange $i$ :
  $x_{ij} / (x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4})$
- Cette fonction aussi est non linéaire! Que faire?...

# Exemple 3: deuxième modèle (suite)

- Pas plus de 50% du matériau 1 dans le mélange B:

  $x_{B1} / (x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \leq 0.5$
- Il est facile de rendre cette contrainte linéaire:

  $x_{B1} \leq 0.5 (x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4})$
- Ou encore:

  $0.5\, x_{B1} - 0.5\, x_{B2} - 0.5\, x_{B3} - 0.5\, x_{B4} \leq 0$
- Voir l'exemple complet p. 52-56 H&L
- Voir aussi la résolution par *Excel Solver* (Spreadsheets\Chapter 3\Save-It.xls)
- Autre exemple de problème de mélange dans les *Worked Examples* chap. 3

# Modélisation en PL: conclusions

- Bien lire l'énoncé du problème:
  - Identifier clairement les données
  - Attention aux unités de mesure!
- Définir les variables:
  - Vérifier que l'objectif et **toutes** les contraintes peuvent être représentées avec ces variables
  - Vérifier que l'objectif et les termes de gauche des contraintes fonctionnelles sont bien linéaires (proportionnalité et additivité)
- Définir l'objectif et toutes les contraintes (fonctionnelles et de non négativité); possibilité d'éliminer les contraintes fonctionnelles redondantes
- Voir sec. 3.4 H&L (Spreadsheets\Chapter 3)

# Méthode du simplexe: préliminaires

- Méthode algébrique basée sur la résolution de systèmes d'équations linéaires
- Revoir la méthode d'élimination de Gauss-Jordan
- On s'intéresse uniquement aux systèmes d'équations linéaires avec un nombre de variables supérieur au nombre d'équations
- Dans ce cas, il y a deux possibilités :
  - il n'y a pas de solution
  - il y a une infinité de solutions
- On suppose que toutes les variables sont $\geq 0$

# Méthode du simplexe: préliminaires

- Dans le cas où il y a une infinité de solutions, la méthode d'élimination de Gauss-Jordan permet d'identifier trois types de variables :
  - variables fixées
  - variables dépendantes
  - variables indépendantes
- Exemple :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2\,x_4 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

- $x_2$ : fixée; $x_4$ : indépendante; $x_1$, $x_3$ : dépendantes

# Solution de base

- Solution obtenue en fixant toutes les variables indépendantes à 0
- **Variables hors-base** : variables indépendantes fixées à 0
- **Variables de base** : les autres variables
- **Solution de base *réalisable*** : lorsque toutes les variables de base ont une valeur ≥ 0
- **Solution de base réalisable *dégénérée*** : lorsqu'au moins une variable de base a la valeur 0
- Dans l'exemple, la solution de base est :

  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$
- Elle est réalisable et non dégénérée

# Pivot

- Il est facile de changer le statut des variables par des opérations élémentaires :

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_4 = 1 \\ x_2 \quad = 1 \\ x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 \quad = 5 \\ x_2 \quad = 1 \\ -x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

- Dans cette nouvelle solution de base, on a :
  - Variable hors-base : $x_3$
  - Variables de base : $x_1$, $x_2$, $x_4$
  - Solution de base *non réalisable* : $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_4 = -2$
- **Pivot** : opération consistant à remplacer une variable de base par une variable hors base pour obtenir une nouvelle solution de base, dite *adjacente*

# Retour à l'exemple *Wyndor Glass*

- Les contraintes fonctionnelles sont :

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

- On ajoute des *variables d'écart* ≥ 0 pour transformer ces inégalités en système d'équations :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 18 \end{array}$$

- Variables hors-base : $x_1, x_2$

# Exemple *Wyndor Glass* (suite)

- Solution de base :
  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 12, 18)$
- On veut effectuer un pivot : remplacer la variable hors-base $x_2$ par une des variables de base actuelles
- Laquelle?...
- On veut que la nouvelle solution de base soit réalisable
- Dans cette solution de base, on aura toujours $x_1 = 0$ et une des variables d'écart deviendra une variable hors-base, donc prendra la valeur 0

$$\begin{array}{lllll} x_3 = 4 - x_1 & & \geq 0 & & 4 \geq 0 \\ x_4 = 12 & - 2x_2 & \geq 0 & \Leftrightarrow & 12 - 2x_2 \geq 0 \\ x_5 = 18 - 3x_1 & - 2x_2 & \geq 0 & & 18 - 2x_2 \geq 0 \end{array}$$

# Exemple *Wyndor Glass* (suite)

- En exploitant les inégalités

  $x_4 = 12 - 2\,x_2 \geq 0$

  $x_5 = 18 - 2\,x_2 \geq 0$

  on obtient : $x_2 \leq 12/2 = 6$

  $x_2 \leq 18/2 = 9$

- Donc, en posant $x_2 = 6$ , on obtient $x_4 = 0$ , alors que si on augmente davantage $x_2$ , la solution devient non réalisable
- On effectue un pivot: remplacer la variable de base $x_4$ (qui deviendra hors-base) par $x_2$

# Exemple *Wyndor Glass* (suite)

- On obtient alors le système suivant :

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & +x_3 & & & = & 4 \\ & x_2 & & +0{,}5x_4 & & = & 6 \\ 3x_1 & & & -x_4 & +x_5 & = & 6 \end{array}$$

- Solution de base : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}6{,}4{,}0{,}6)$
- On effectue un pivot pour que la variable $x_1$ ***entre dans la base*** (devienne variable de base)
- Puisque $x_4 = 0$ :

$$\begin{array}{lllllll} x_3 & = & 4 & -x_1 & \geq & 0 \\ x_5 & = & 6 & -3x_1 & \geq & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} x_1 & \leq & 4 \\ x_1 & \leq & 2 \end{array}$$

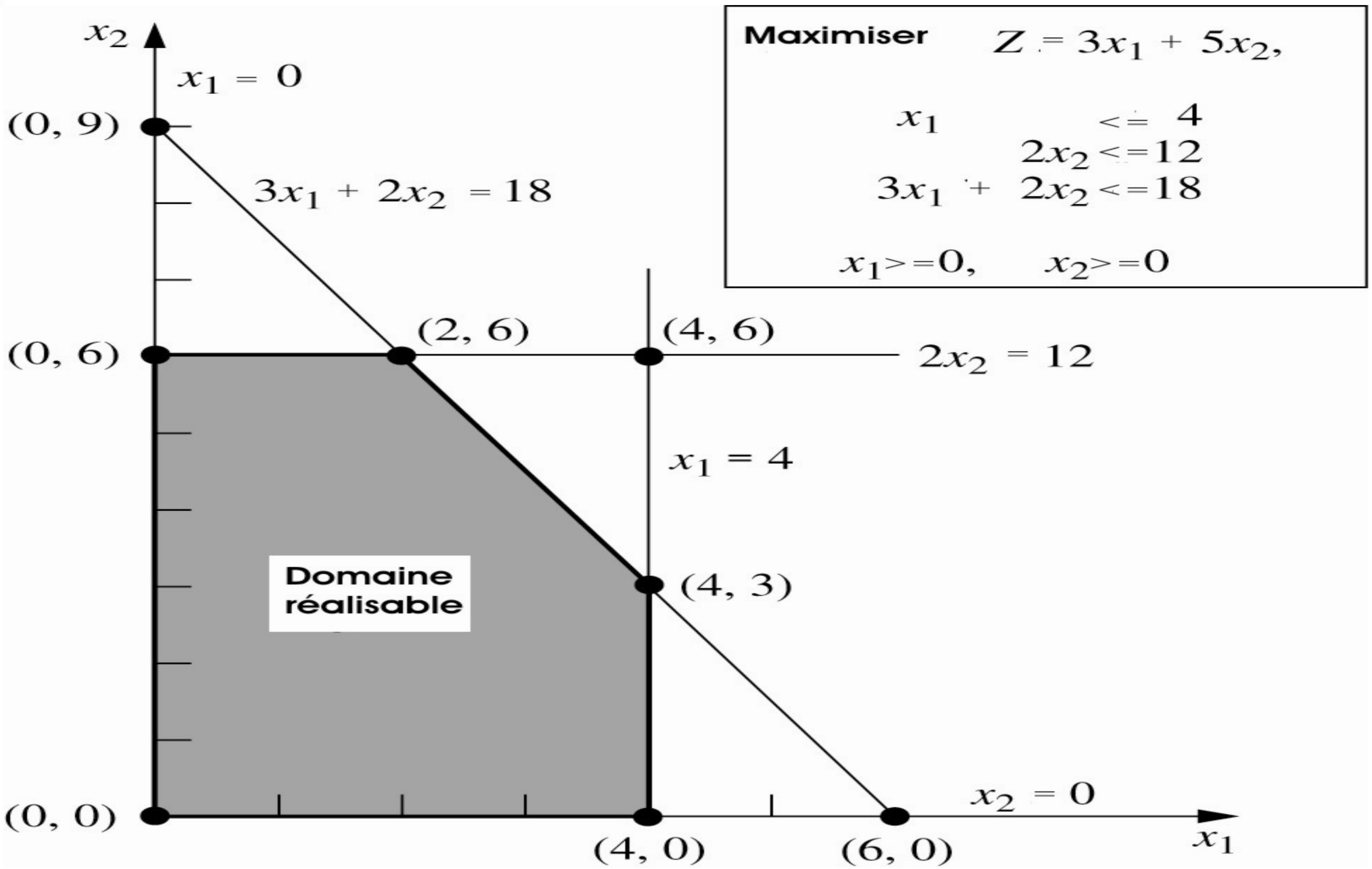
# Exemple *Wyndor Glass* (suite)

- En posant $x_1 = 2$, on obtient $x_5 = 0$
- Pivot : remplacer la variable de base $x_5$ par $x_1$
- Le système obtenu est alors :

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
 & & x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 & = & 2 \\
 & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & & = & 6 \\
x_1 & & & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & = & 2
\end{array}
$$

- Solution de base : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2,6,2,0,0)$

# Interprétation géométrique



# Interprétation géométrique

- Une solution de base réalisable correspond à un point extrême du domaine réalisable
- Un pivot correspond à un déplacement d'un point extrême à un autre qui lui est adjacent
- La méthode du simplexe :
  - Démarre avec une solution de base réalisable initiale (un point extrême)
  - Effectue à chaque itération un pivot, passant ainsi à une solution de base réalisable adjacente (un point extrême adjacent)
  - S'arrête lorsqu'elle identifie une solution de base réalisable optimale (un point extrême correspondant à une solution optimale)