IFT1575 Modèles de recherche opérationnelle (RO)

2. Programmation linéaire
a. Modélisation

Programmation linéaire (PL)

- Problème classique de planification : affecter des *ressources limitées* à plusieurs *activités concurrentes*
- Programme = Plan (solution de ce problème)
- Programmation mathématique (RO) ≠ Programmation informatique
- Fonction linéaire: fonction dans laquelle chaque variable évolue linéairement

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

- Modèle de PL = Modèle de programmation mathématique dans lequel toutes les fonctions sont linéaires

Exemple d'un modèle de PL

- Données du problème (*Wyndor Glass*, sec. 3.1 H&L):
  - Deux types de produits (produit 1, produit 2)
  - Trois usines (usine 1, usine 2, usine 3)
  - Capacité de production pour chaque usine (par semaine)
  - Profit par lot (20 unités) de chaque produit

	Produit 1 (tps de production, h/lot)	Produit 2 (tps de production, h/lot)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit($)/lot	3000	5000	

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Chaque lot du produit 1 (2) est le résultat combiné de la production aux usines 1 et 3 (2 et 3)
- Énoncé du problème: Déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de lots/semaine) de façon à maximiser le profit total
- Variables de décision:
  - $x_1 =$ nombre de lots du produit 1
  - $x_2 =$ nombre de lots du produit 2
- Fonction objectif:
  - $Z =$ profit total
  - $Z = 3\,x_1 + 5\,x_2$ (profit total en milliers de $)
  - Maximiser Z

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Contraintes de capacité de production
  - $x_1 \leq 4$ (usine 1)
  - $2\,x_2 \leq 12$ (usine 2)
  - $3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 18$ (usine 3)
- Contraintes de non négativité
  - $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (nombre d'unités produites ≥ 0)

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Maximiser $Z = 3\,x_1 + 5\,x_2$

  sous les contraintes:

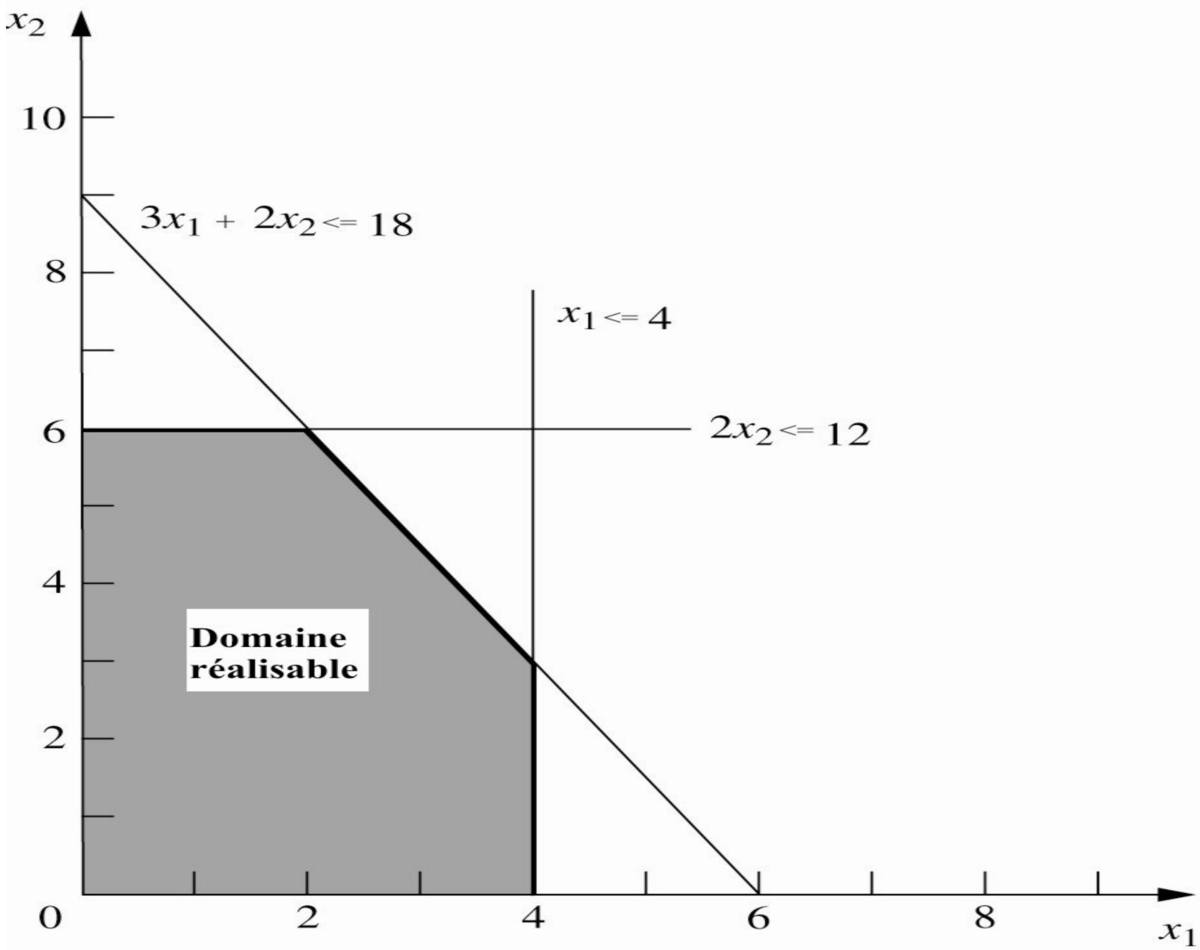
$$x_1 \leq 4 \quad \text{(usine 1)}$$

$$2\,x_2 \leq 12 \quad \text{(usine 2)}$$

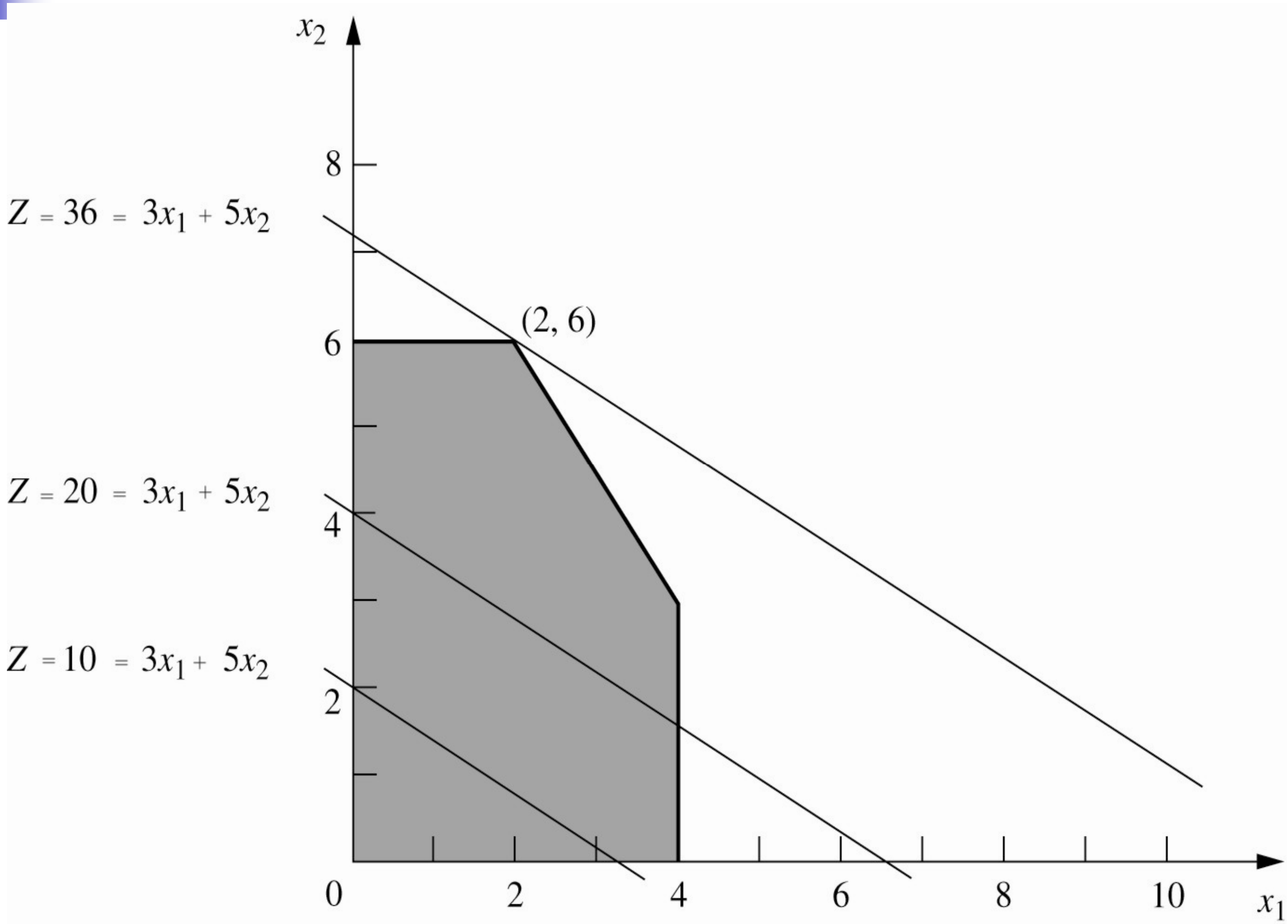
$$3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 18 \quad \text{(usine 3)}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad \text{(contraintes de non négativité)}$$

Résolution graphique



Résolution graphique (suite)



Méthode graphique

- Tracer les droites correspondant aux contraintes
- Déterminer le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte
- Tracer les droites correspondant à la variation de l'objectif
  - Dans l'exemple:
    $Z = 3x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = -(3/5)\ x_1 + (1/5)\ Z$
  - Ordonnée à l'origine (dépend de la valeur de Z): $(1/5)\ Z$
  - Pente: $-3/5$
  - Maximiser: augmenter Z
- Faire cet exemple avec le IOR Tutorial

Méthode graphique (suite)

- Autre exemple dans le OR Tutor
- Voir aussi *Worked Examples* chap. 3 (CD)
- Uniquement pour les modèles à deux variables
- Plus de deux variables: méthode du simplexe
- Logiciels proposant la méthode du simplexe:
  - Excel Solver
  - LINDO (CD)
  - CPLEX (CD)
- Problème *Wyndor Glass* avec Excel Solver

Excel Solver: conseils d'utilisation

- Entrer d'abord les données
- Les identifier clairement avec des noms d'intervalles
- Entrer chaque donnée dans une seule cellule (ne pas répéter la même donnée dans plusieurs formules)
- Utiliser des couleurs et des bordures pour distinguer les différents types de cellules:
  - Cellules données
  - Cellules variables
  - Cellules résultats
  - Cellule cible (objectif)
- Lire sec. 3.6 (H&L) et chap. 21 (CD)

Modèle général de PL

- m ressources (3 usines)
- n activités (2 produits)
- Niveau de l'activité j (taux de production du produit j): x_j
- Mesure de performance globale (profit total): Z
- Accroissement de Z résultant de l'augmentation d'une unité du niveau de l'activité j : c_j
- Quantité disponible de la ressource i : b_i
- Quantité de ressource i consommée par l'activité j : a_{ij}

Modèle général de PL (suite)

- Objectif

  Maximiser $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

- Contraintes fonctionnelles

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

- Contraintes de non négativité

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Modèle général de PL (suite)

- On appelle ce modèle *forme standard*
- D'autres formes sont possibles et définissent aussi des modèles de PL
  - Minimiser au lieu de Maximiser: min $f(x) = -\max - f(x)$
  - $\geq$, $=$ dans certaines contraintes fonctionnelles au lieu de $\leq$
  - Certaines variables peuvent ne pas être forcées à être ≥ 0
    - $x \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad x + 4 \geq 0$

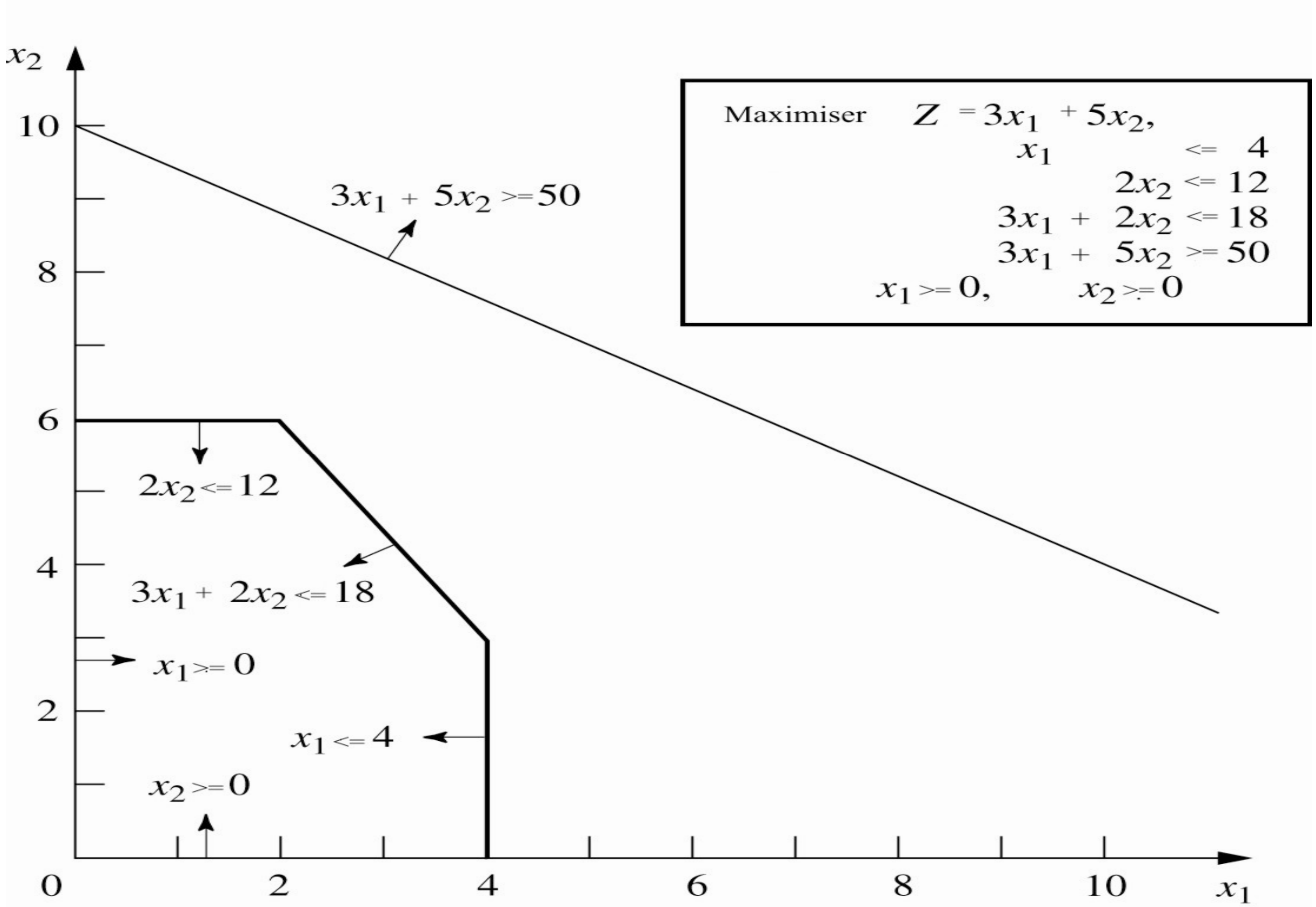
      définir $y = x + 4$, $y \geq 0$
    - $-10 \leq x \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x + 10 \leq 8$

      définir $y = x + 10$, $y \geq 0$

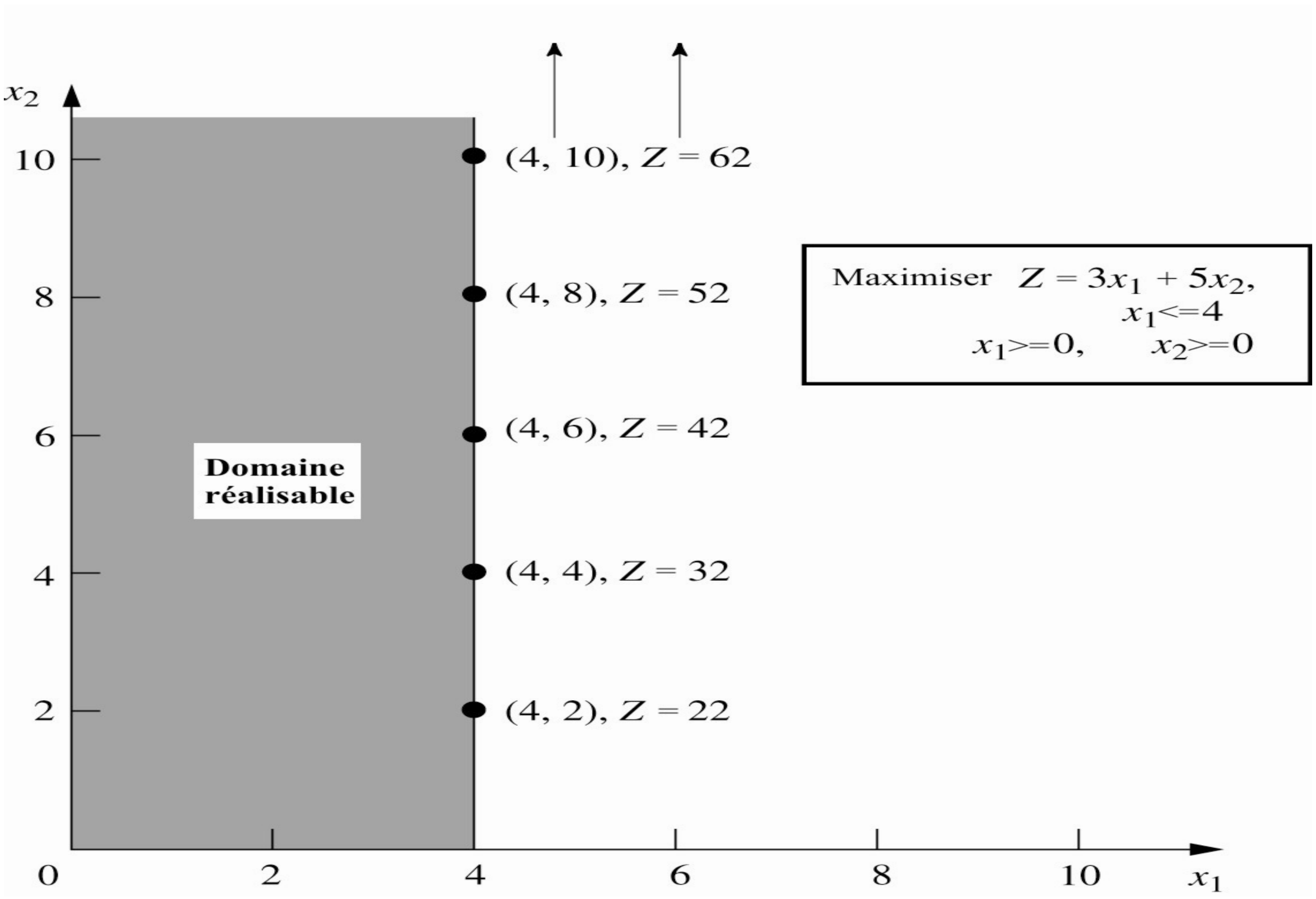
Terminologie de base en PL

- *Solution réalisable*: solution pour laquelle toutes les contraintes sont satisfaites: $\in$ domaine réalisable
- *Solution non réalisable*: solution pour laquelle au moins une contrainte est violée: $\notin$ domaine réalisable
- *Solution optimale*: solution ayant la meilleure valeur possible de l'objectif
- Modèle n'ayant *aucune solution optimale*:
  - Domaine réalisable vide
  - Objectif non borné
- Modèle ayant une *infinité de solutions optimales*

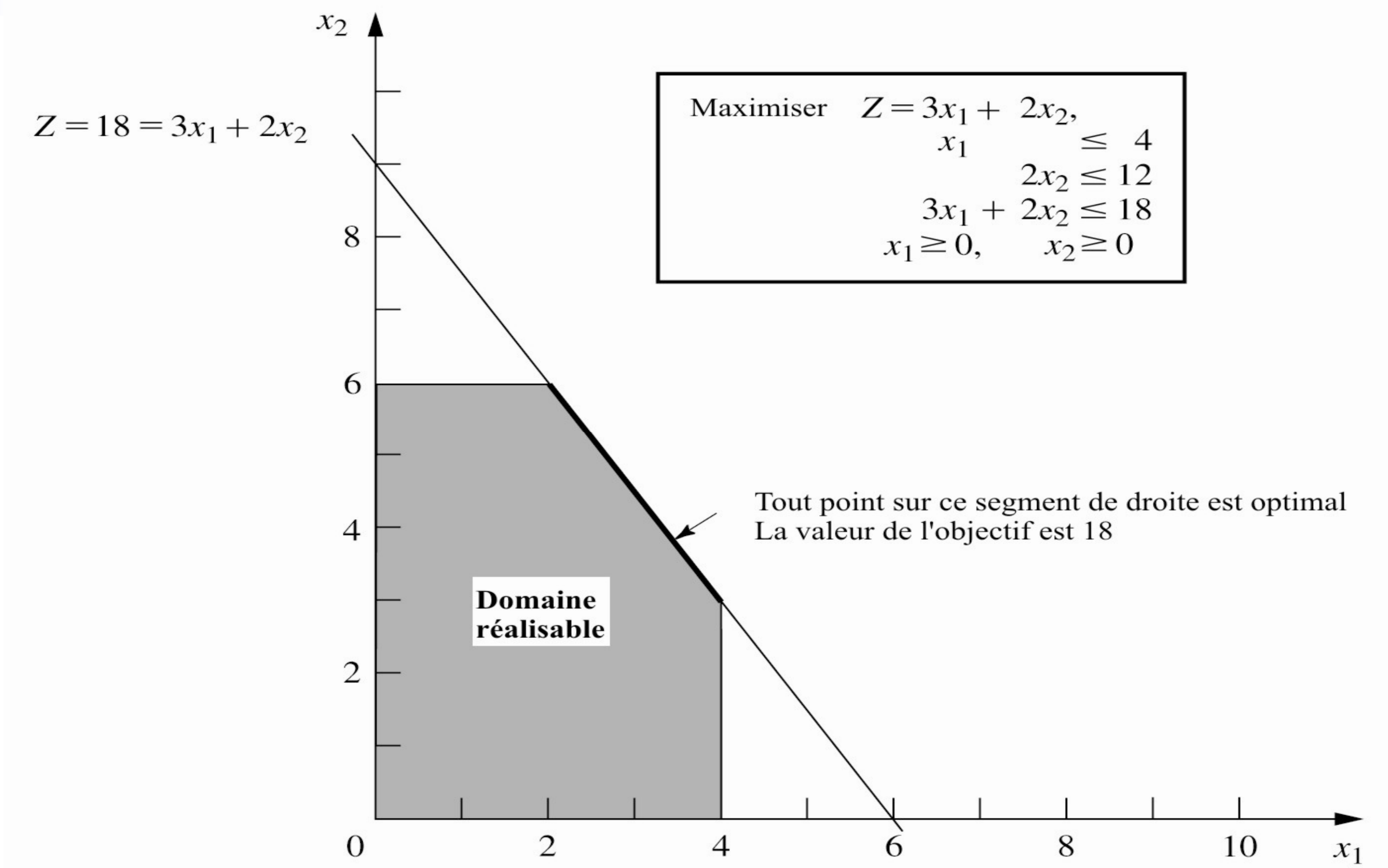
Domaine réalisable vide



Objectif non borné



Infinité de solutions optimales



Interprétation géométrique

- *Point extrême du domaine réalisable* : solution réalisable correspondant à un coin du domaine réalisable
- En deux dimensions, un coin est la rencontre de deux droites (ou plus) définies par les frontières des contraintes
- Théorème: Supposons qu'un modèle de PL a un domaine réalisable non vide et borné; alors il existe au moins une solution optimale correspondant à un point extrême du domaine réalisable

Points extrêmes