IUT Belfort Montbéliard

Introduction à la
RECHERCHE OPERATIONNELLE

Partie 3
Programmation linéaire

Karine DESCHINKEL

1.Programme linéaire

- **Définition:**
  formulation d'un problème sous forme de

  - **Variables de décision continues non négatives**

  - **Contraintes exprimées en fonction de ces variables**
    - Fonctions linéaires (égalités, inégalités)

  - **Un objectif à optimiser (max/min)**
    - Fonction linéaire des variables de décision
    - Fonction objectif/économique

Un problème de production

- Une entreprise a la faculté de fabriquer sur une machine donnée,travaillant 45h par semaine, 3 produits P1,P2,P3
- Grâce à une étude de marché, on sait que les possibilités de vente ne dépasse pas 1000, 500,1500 articles par semaine
- Les rendements de la machine sont respectivement pour les 3 produits 50,25,75 articles par heure.
- Le profit marginal net dégagé par article produit est respectivement 4,12,3 Keuros

- Trouver le programme de production maximisant les bénéfices

Programme de production

maximiser	$z =$	$4x_1$	$+$	$12x_2$	$+3x_3$		
sous	x_1				$\leq$ 1000		(1)
		x_2			$\leq$ 500	(2)	
				x_3	$\leq$ 1500		(3)
	$3x_1$	$+ 6x_2$	$+ 2x_3$		$\leq$ 6750		(4)
	$x_1,$	$x_2,$	$x_3,$		$\geq$ 0		(0)

(4) $1/50x_1 + 1/25\ x_2 + 1/75\ x_3 \leq 45$

PLs: Résolution graphique en 2-D

Exemple 1:

Maximiser $z = x + y$

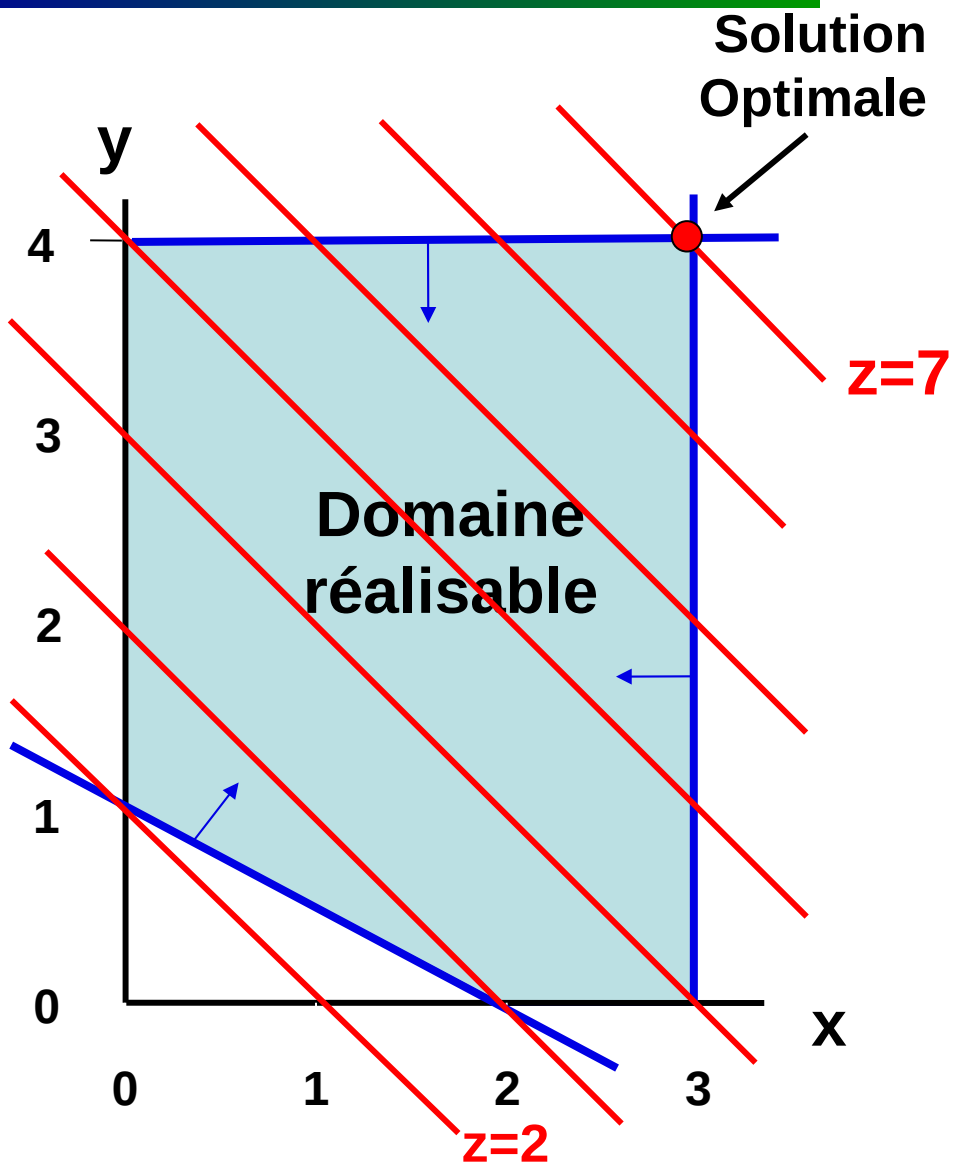
sous:

$x + 2y \geq 2$

$x \leq 3$

$y \leq 4$

$x \geq 0 \; y \geq 0$



Résolution graphique en 2-D

Exemple 2:

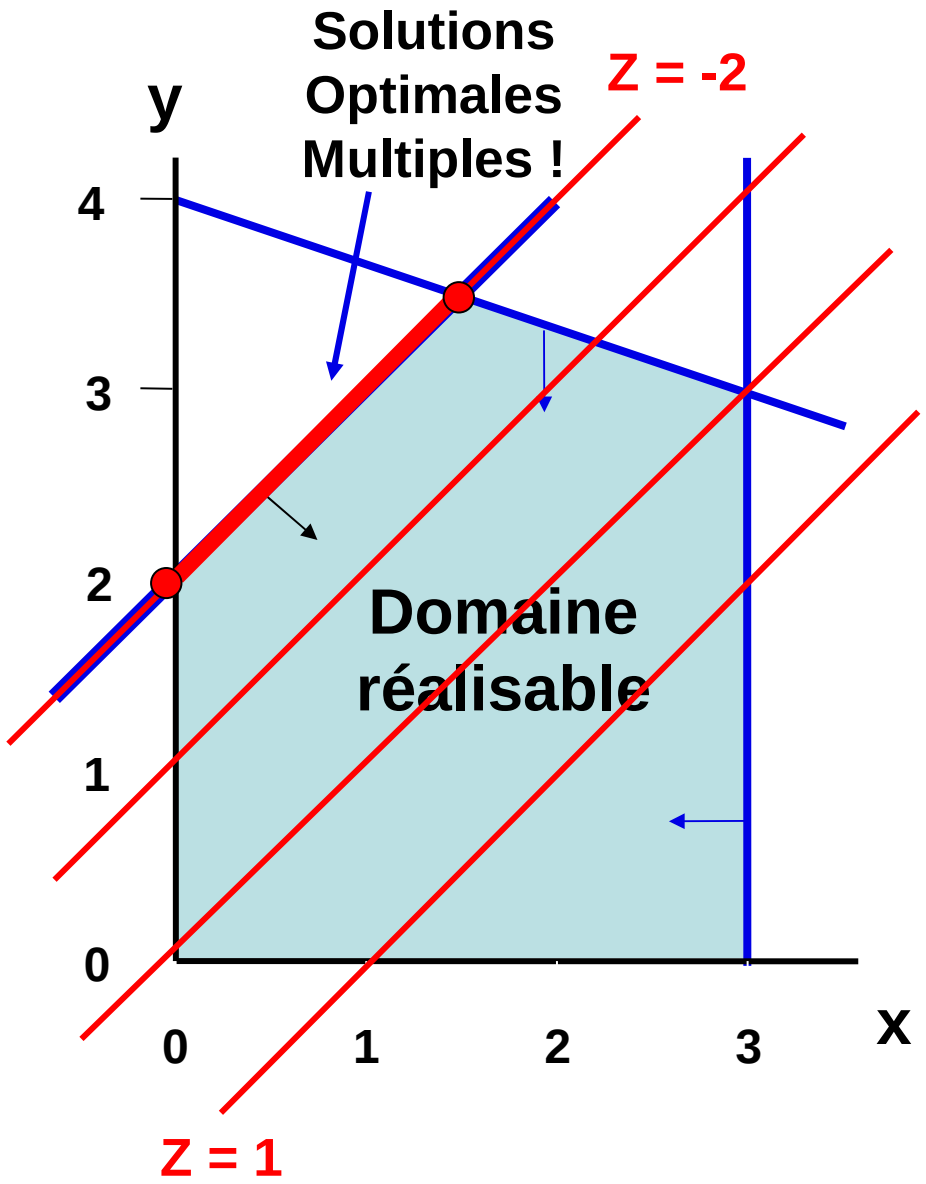
Minimiser $z = x - y$

sous: $1/3\ x + y \leq 4$

$-2\ x + 2\ y \leq 4$

$x \leq 3$

$x \geq 0\ y \geq 0$



Résolution graphique en 2-D

Exemple 3:

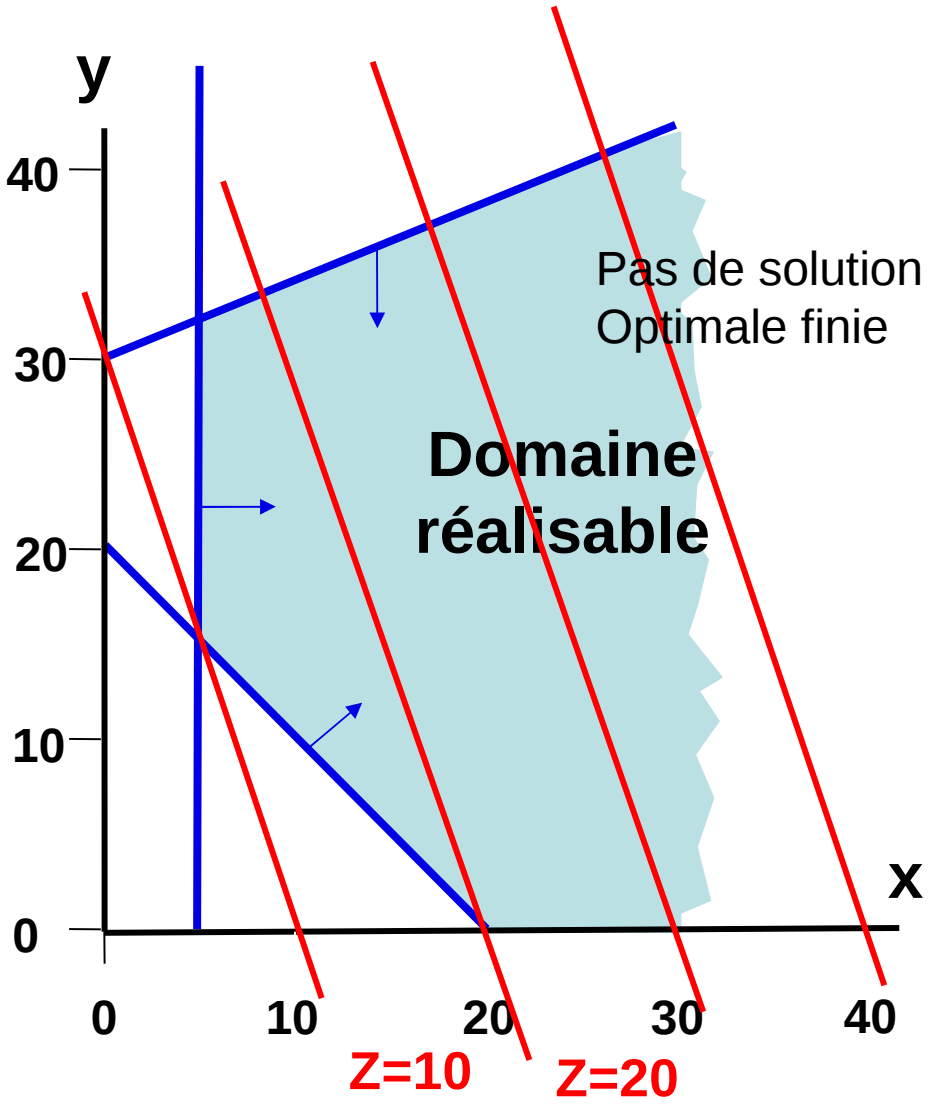
Maximiser $x + 1/3\ y$

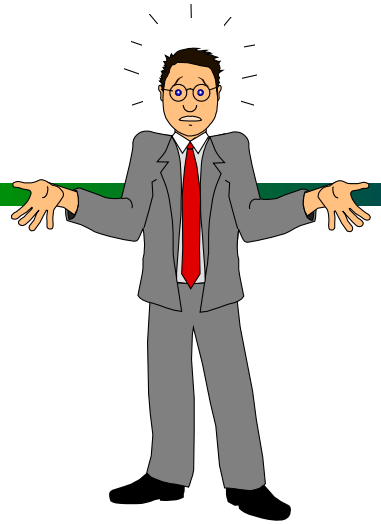
sous: $x + y \geq 20$

$-2x + 5y \leq 150$

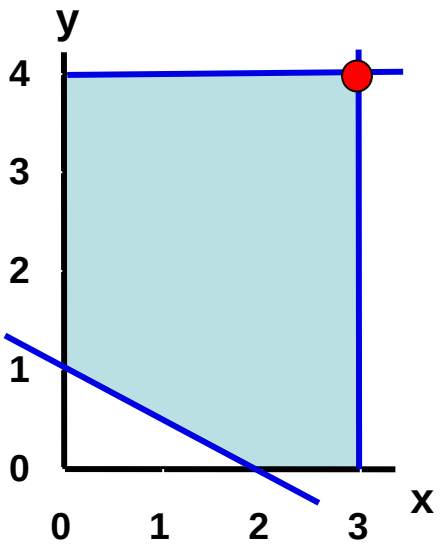
$x \geq 5$

$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

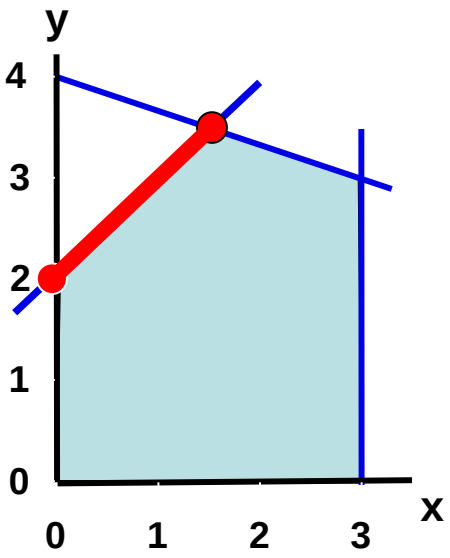




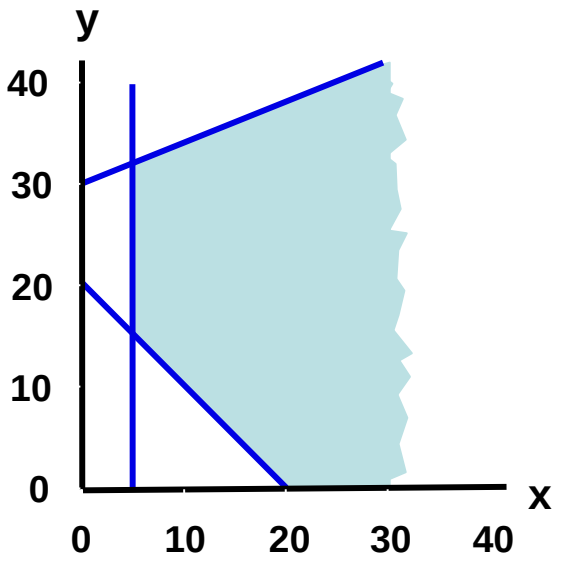
Ce qu'on peut retenir des 3 exemples?



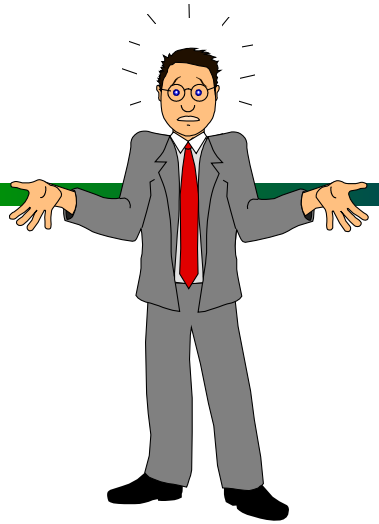
Une solution optimale



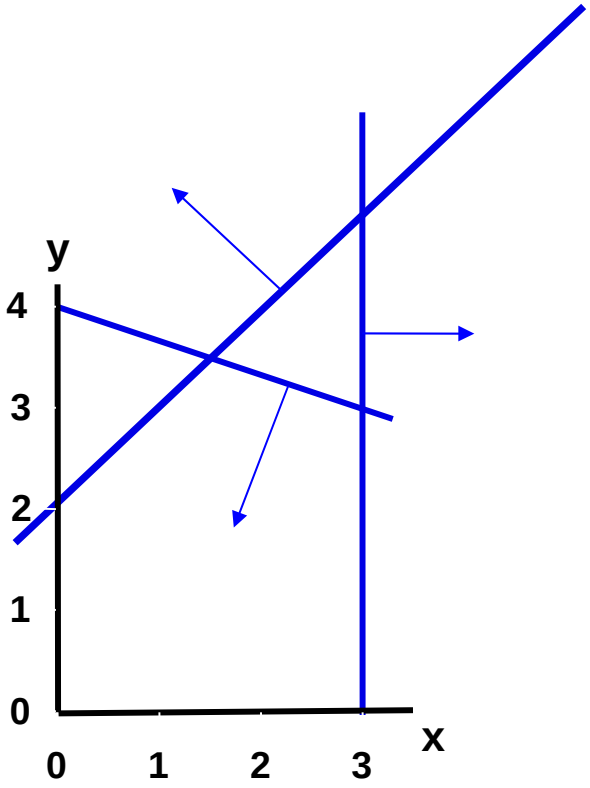
Une infinité de solutions optimales



Pas de solution optimale
À distance finie



Et si …



Pas de solution
(domaine réalisable vide)

Résolution graphique en 2-D

Exemple 1:

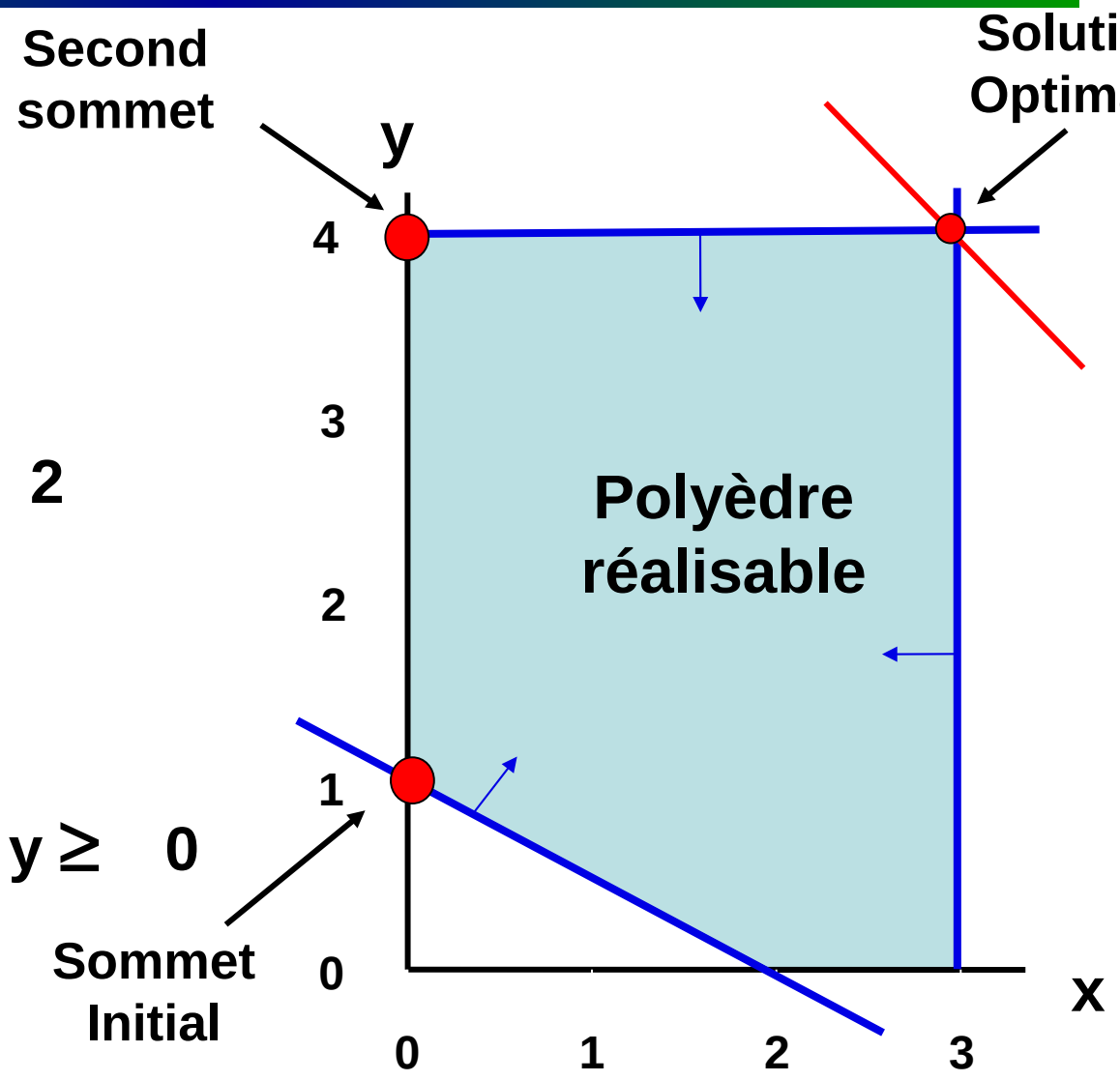
Maximiser $x + y$

sous: $x + 2y \geq 2$

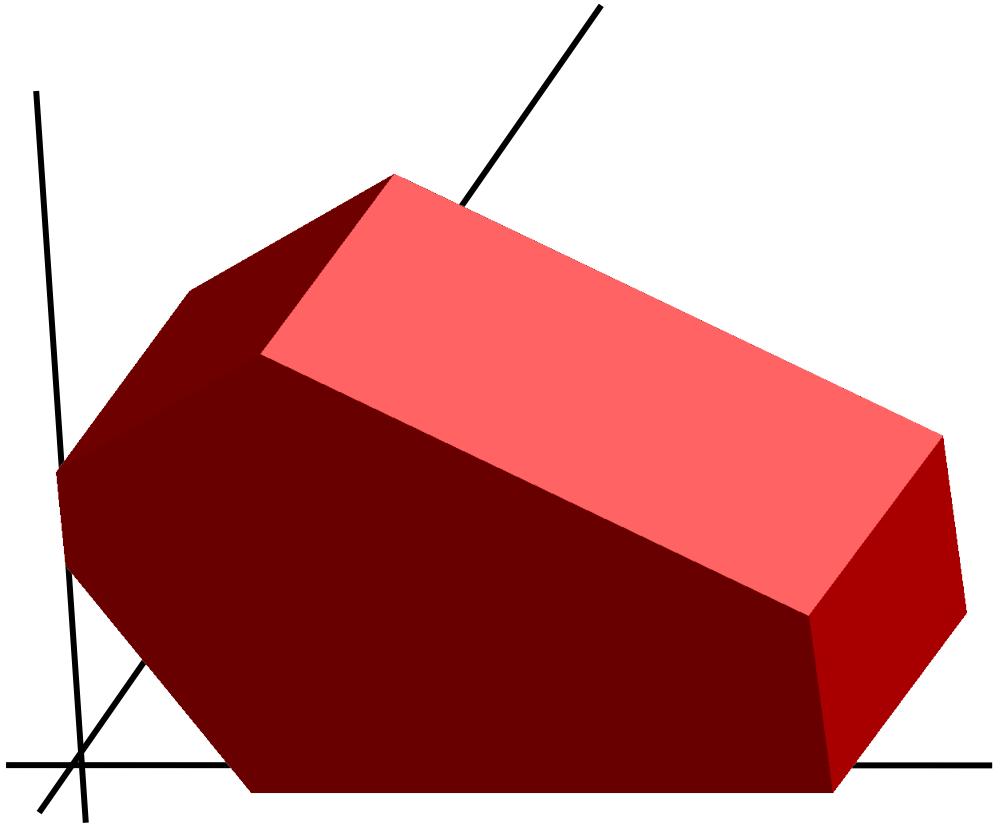
$x \leq 3$

$y \leq 4$

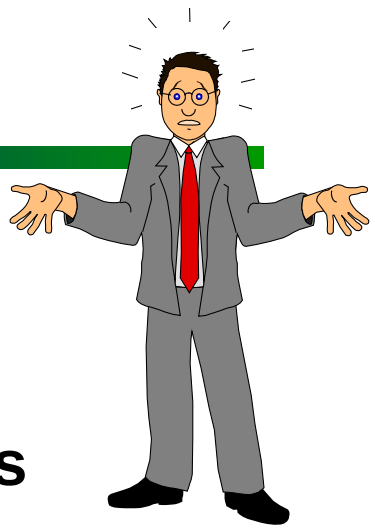
$x \geq 0$ $y \geq 0$



Généralisation aux dimensions supérieures



Comment s'en servir pour résoudre un PL?



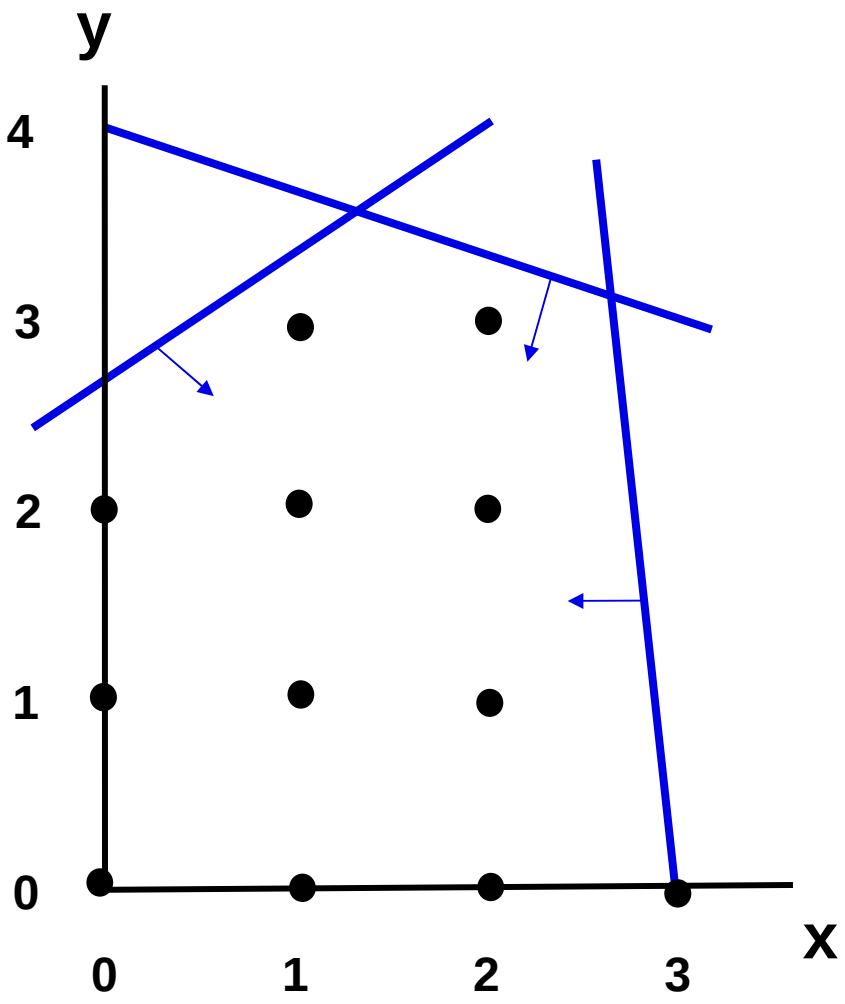
- **Les contraintes du PL définissent une forme géométrique appelée polyèdre des solutions réalisables (intersection d'hyperplans ou demi espaces fermés correspondant aux contraintes d'inégalité).**

- **Si on pouvait énumérer tous les sommets du polyèdre, il suffirait de calculer la valeur de la fonction objectif en chaque sommet et de choisir la plus élevée**

- ***La Méthode du Simplexe* chemine intelligemment de sommet en sommet du polyèdre jusqu'à prouver qu'elle a obtenu une solution optimale.**

Mais en Nombre Entiers, c'est très différent!

- Le domaine réalisable est un ensemble de points entiers
- Il n'y a pas d'algorithme très "efficace" pour résoudre un PLNE
- Le résoudre comme un PL est une relaxation et permet d'obtenir une borne de la solution optimale



Problème du sac à dos (*knapsack*)

- **Problème :**

  Le problème est de remplir un sac-à-dos supportant un poids maximal P avec des objets ayant un poids p_i et un indice de satisfaction s_i de telle sorte que la satisfaction totale S soit maximale.

  Quels objets doit on mettre dans le sac ?

Problème du sac à dos

- **Modèle :**

  N objets de poids p_i et de valeur s_i

  N variables x_i (=1 si l'objet i est choisi, 0 sinon)

  Maximiser $\sum_{(i=1,\ i=N)} s_i\, x_i$

  sous $\sum_{(i=1,\ i=N)} p_i\, x_i \leq P$

  $x_i \in \{0,1\}$

Problème du sac à dos

- **Algorithmes de résolution :**
  - **Choix aléatoire des objets**
  - **Algorithme glouton : Choix en fonction du rapport p_i / s_i**
    - Trier par ordre croissant des p_i / s_i
    - J:=0
    - Prendre un objet j (dans la liste triée)
      tant que $\sum_{(i=1,\ i=j)} p_i \leq P$
  - **Programmation dynamique**
  - **Algorithme Séparation/Evaluation (Branch&Bound)**

Problème du sac à dos

- **Exemple :**

  P=50

Objet	Valeur	Poids	Rapport
1	60	10	1/6
2	100	20	1/5
3	120	30	1/4

Solution obtenue avec la méthode gloutonne :
Objets 1 et 2, valeur totale = 160

Solution optimale :
Objets 2 et 3, valeur totale = 220

Problème de sac à dos

- **Applications :**

  - problème de recouvrement

  - problème de découpe

  - cryptographie

  - ...