M12-05 Mathématiques

Chapitre 2 : Programmation linéaire

Denis.franjou@u-psud.fr

Plan du Chapitre 2

2.1 Exemple introductif

2.2 Formalisation du programme

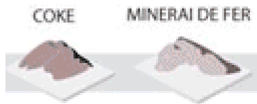
2.3 Méthode graphique

2.1 Exemple introductif

Gestion de la production

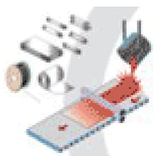
Cas Production

1 lingot Acier LQ (300€)



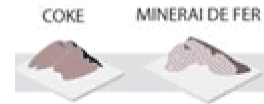
2kg

4kWh



3h

1 lingot Acier HQ (800€)



1kg

5kWh

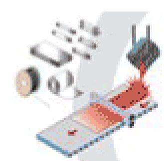
10h

Production par lot de 1000 lingots.

Les contraintes de l'entreprise sont sur **les ressources** :

8 000kg

20 000kWh



30 000h

Pb : Combien de lots de lingots de chaque type faut-il produire pour maximiser le chiffre d'affaires ?

2.2 Formalisation du programme

- Variable de décisions
- Contraintes
- Fonction-objectif

Formalisation du problème (1/3)

1) Variables de décision

On cherche :

- x_1= nb de lots de 1000 lingots de type LQ
- x_2= nb de lots de 1000 lingots de type HQ

Les variables x_1 et x_2 sont appelées **« variables de décision »**, et le couple (x_1, x_2) est appelé **« un programme »**

Formalisation du problème (2/3)

2) Contraintes

Le programme (x_1, x_2) doit vérifier **« les contraintes »** :

- Matière première $\Longrightarrow 2x_1 + x_2 \leq 8$
- Energie $\Longrightarrow 4x_1 + 5x_2 \leq 20$
- Laminage $\Longrightarrow 3x_1 + 10x_2 \leq 30$

Il y a aussi des **contraintes logiques** : on produit des quantités positives !

$$x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0$$

Solutions

Solutions admissibles

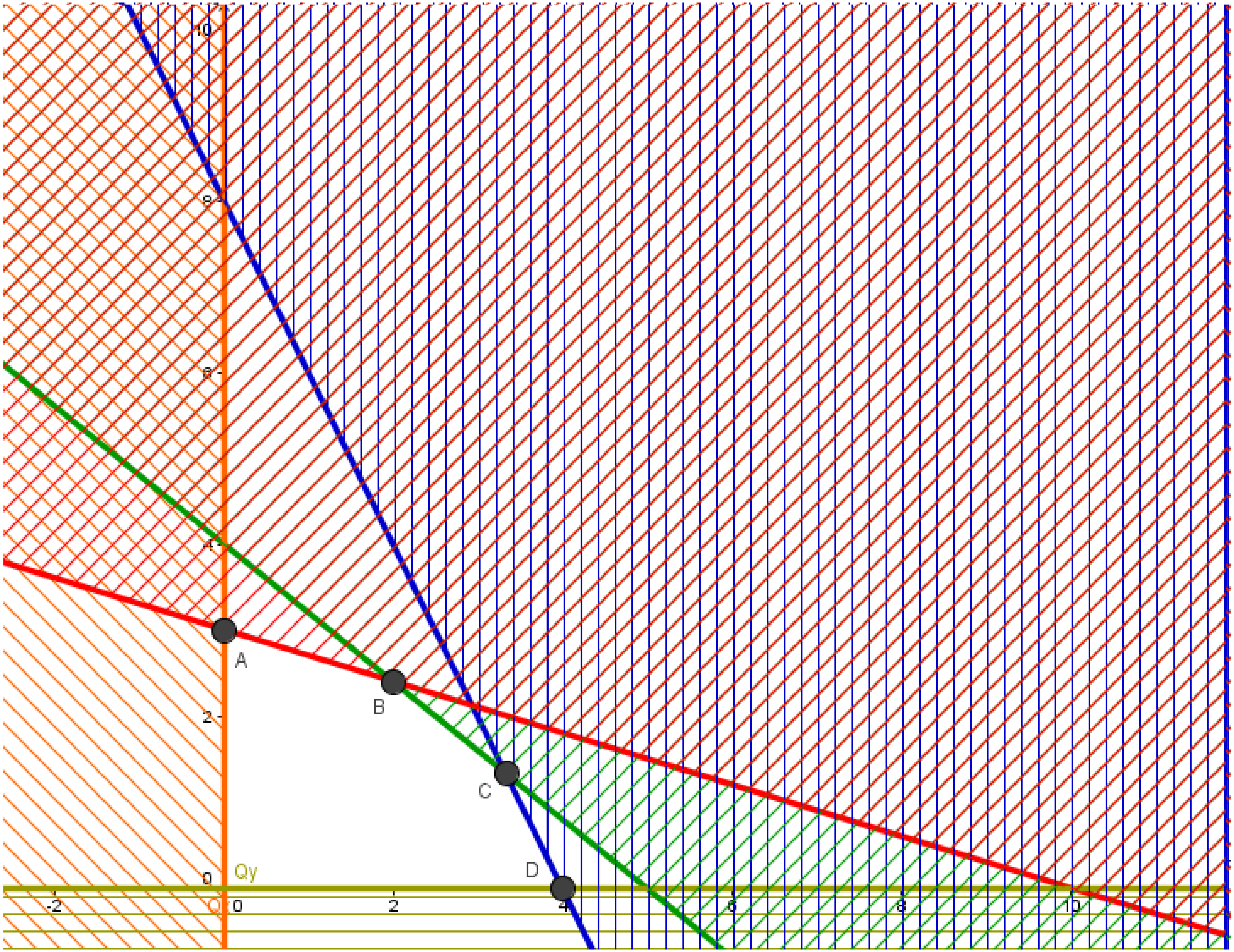
On appelle **solution admissible** tout programme (x_1, x_2) vérifiant les contraintes :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0 \,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Par exemple $(x_1 = \mathbf{0}, x_2 = \mathbf{0})$ est ici une solution admissible.

L'ensemble des solutions admissibles est, en général, infini : c'est un polygone convexe = **un « simplexe »**

Représentation graphique



1)Matière premières

2)Energie

3)Laminage

4)Logique

Formalisation du problème (3/3)

3) Critère d'optimisation – Fonction-objectif

Le programme (x_1, x_2) doit **maximiser** le chiffre d'affaires :

$$\max_{(x_1, x_2)} Z = 300x_1 + 800x_2$$

La fonction-objectif étant linéaire, et les contraintes étant des inéquations linéaires, on parle d'une **programmation linéaire**.

Solutions

Solution optimale

On appelle **solution optimale** toute solution admissible (x_1^*, x_2^*) **optimisant** la fonction-objectif :

$$\forall\ (x_1, x_2),\ Z = \ 300x_1 + 800x_2 \leq Z^* = 300x_1^* + 800x_2^*$$

Théorème

S'il existe une solution optimale, **alors elle est égale à un sommet du simplexe** de l'ensemble des solutions admissibles.

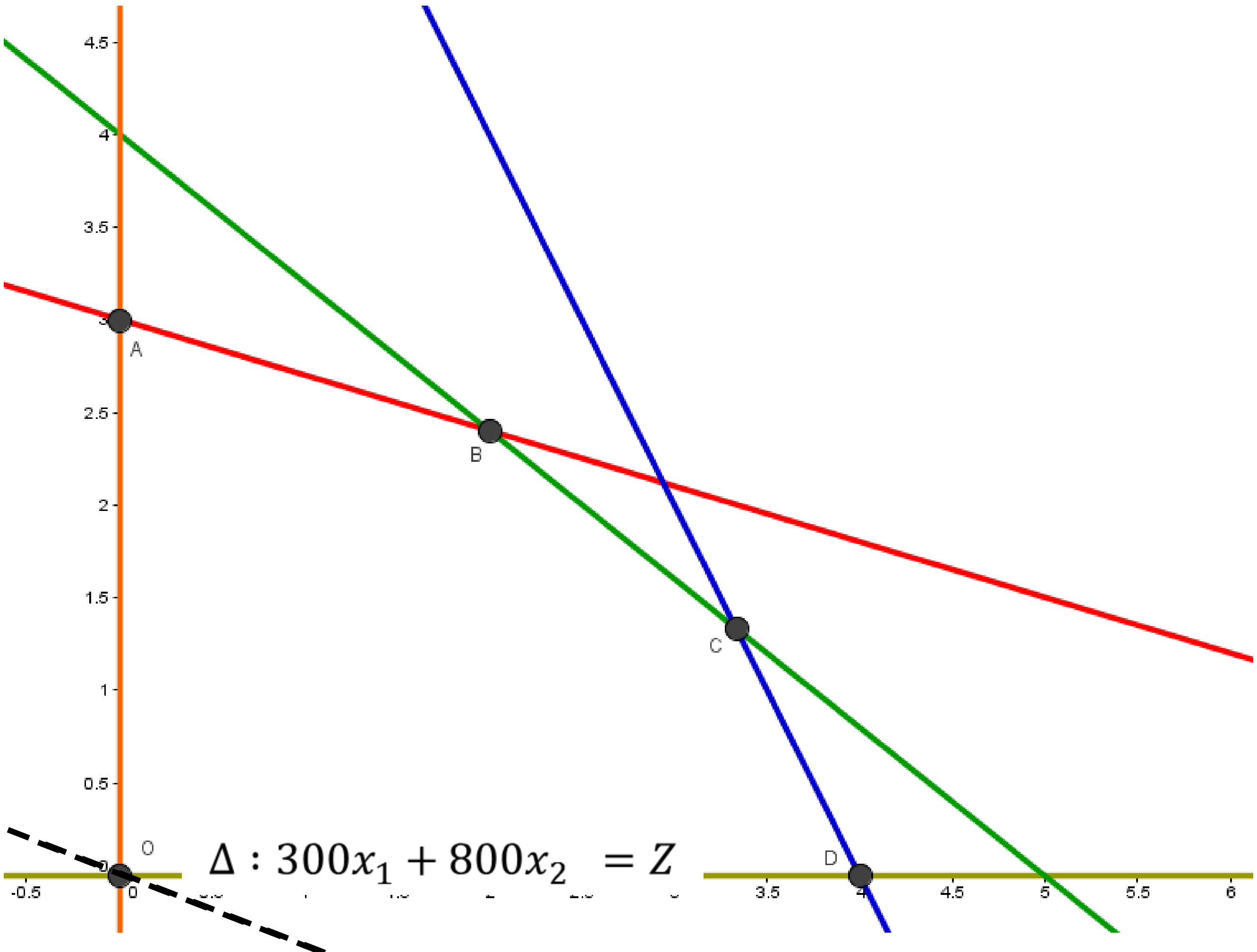
2.3 Méthode graphique

- Sommets du simplexe
- Droite isoprofit
- Fonction-objectif

Méthode graphique

On trace les droites **isoprofit** : $\Delta : 300x_1 + 800x_2 \quad = Z$

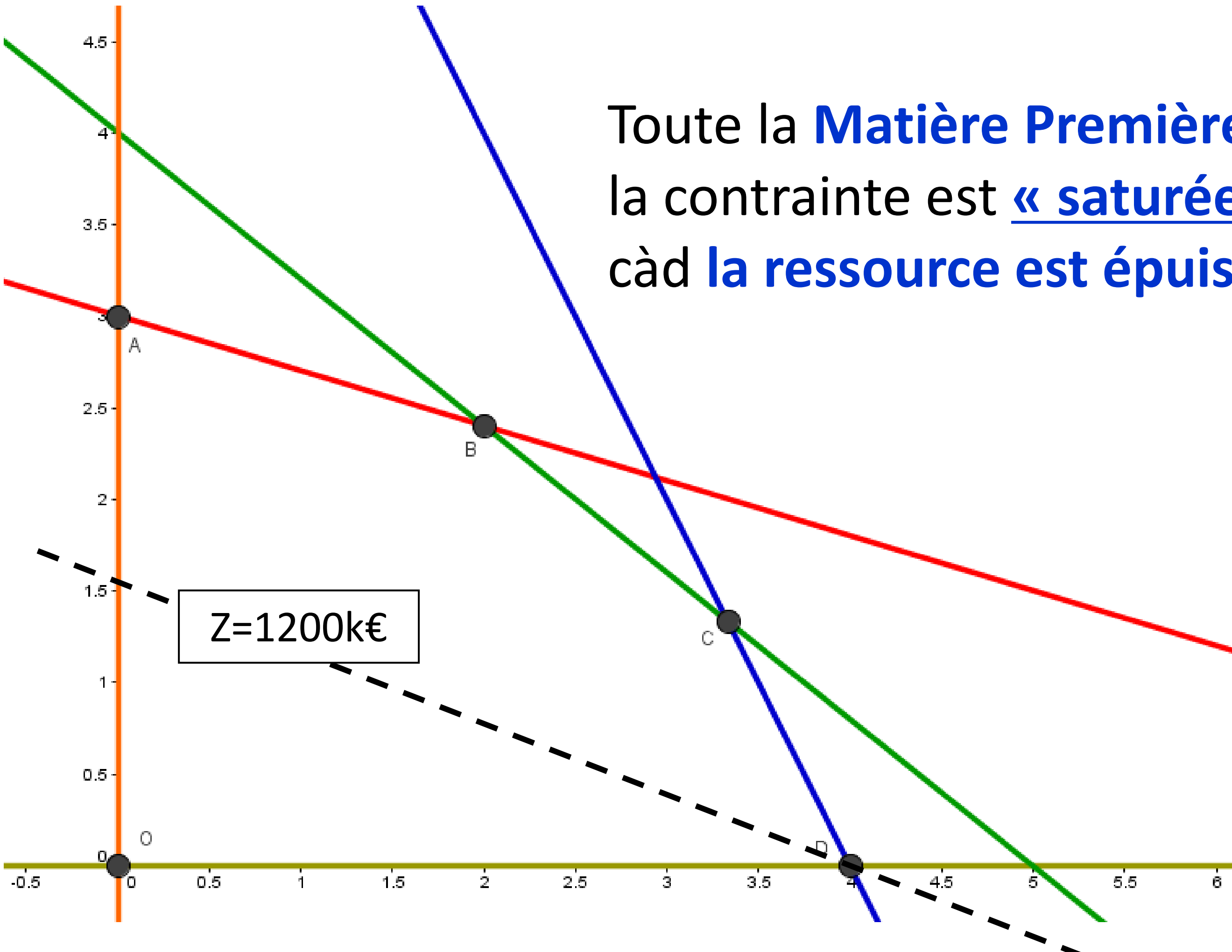
Point O : $\begin{cases} \boldsymbol{x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 = 0} \end{cases} \quad \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 0$



Méthode graphique

Point D, solution de :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow Z = 1\,200\ K€$$

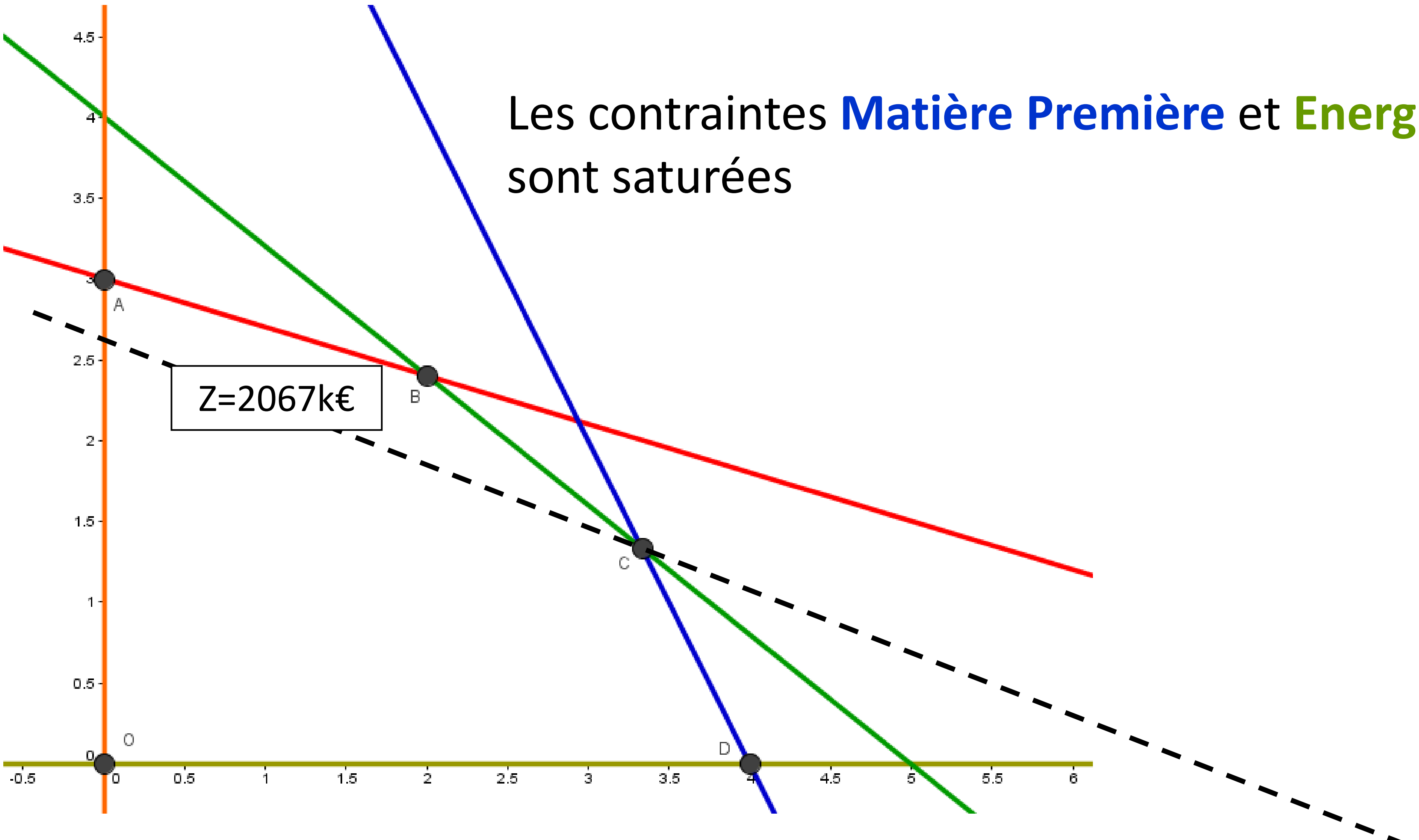


Toute la **Matière Première** est utilisée :
la contrainte est **« saturée »**
càd **la ressource est épuisée**

Méthode graphique

Point C, solution de :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 \\ x_2 = 4/3 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 2\,067\ K€$$



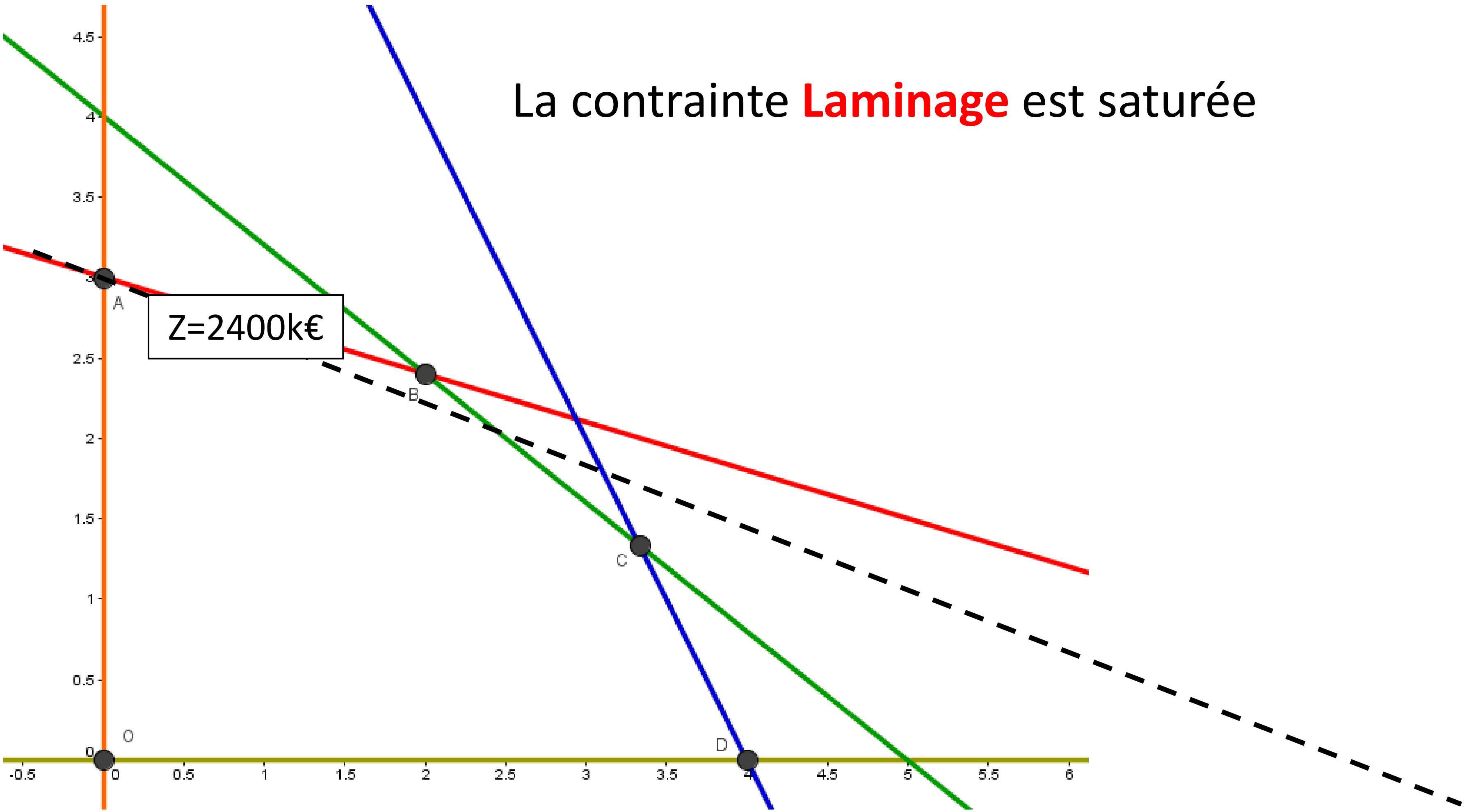
Les contraintes **Matière Première** et **Energie** sont saturées

Méthode graphique

Point A, solution de :

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = 30 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow Z = 2400K€$$

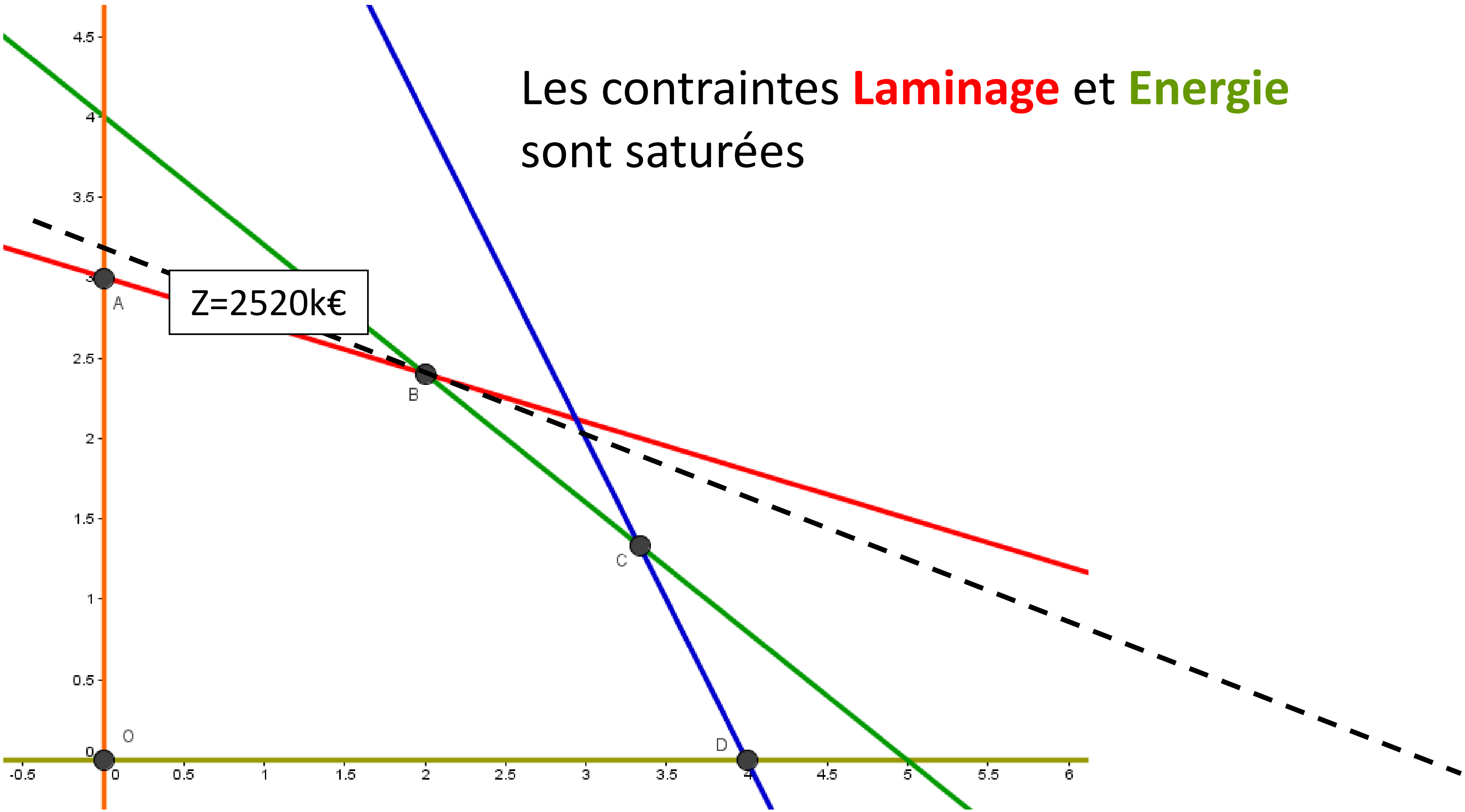
La contrainte **Laminage** est saturée



Méthode graphique

Point B, solution de :

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 20 \\ 3x_1 + 10x_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2{,}4 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 2\,520K€$$



Les contraintes **Laminage** et **Energie** sont saturées

Méthode graphique

Au delà $Z \geq 2520$ mais programme **hors contraintes**